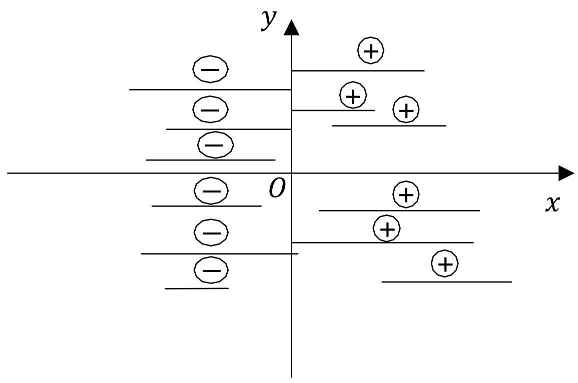
Trigonometría

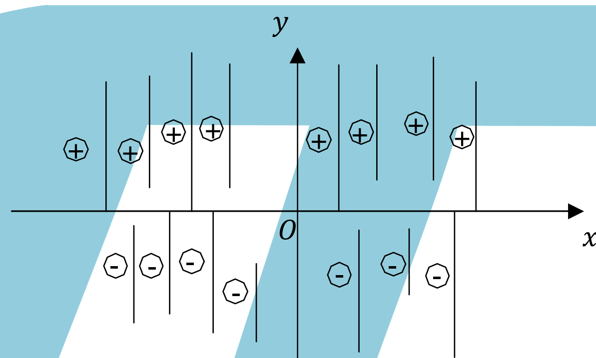
ING. RAÚL MARTÍNEZ

Trigonometría

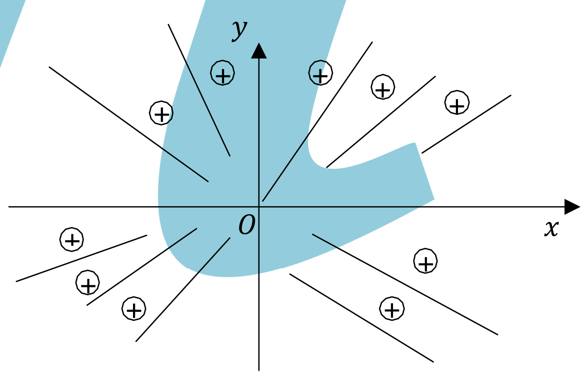
1. Segmentos rectilíneos positivos y negativos:
   Por convención, en un sistema cartesiano octogonal convenimos.
   a) Todo segmento paralelo al eje x será positivo cuando se encuentra a la derecha del eje y, y será negativo cuando se encuentra a la izquierda.



   b) Todo segmento paralelo al eje y, será positivo cuando se encuentra en la parte superior al eje x, y será negativo cuando se encuentra en la parte inferior.

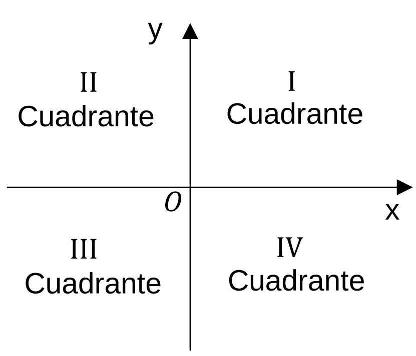


   c) Todo segmento de recta que no sea paralelo a ninguno de los ejes coordenadas será siempre positivo.

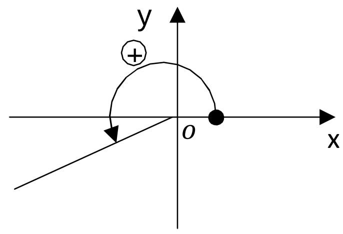


   OBS: Esta convención es válida para trigonometría.

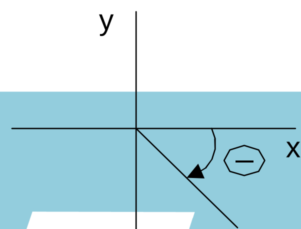
2. Cuadrantes del plano: Si fijamos un sistema cartesiano en un plano, dicho plano queda dividido en cuatro partes o ángulos rectos. A cada uno de estos ángulos lo denominamos cuadrantes y también es convención individualizarlos de la siguiente manera.



3. Arcos y ángulos positivos y negativos:
   OBS: En geometría es hecha la diferenciación entre arcos y ángulo, pero en trigonometría es usado individualmente queriendo significar ángulo.
   Esto es debido a que en el sistema circular o radian el arco es el mismo que el ángulo y este sistema radian es el más utilizado en trigonometría.
   Análogamente a los segmentos es convención en trigonometría que un ángulo positivo se genera girando uno de los lados en sentido anti horario (contrario a las manecillas del reloj)



   Cuando decimos que un ángulo es negativo, quiere decir que fue generado girando en el sentido de los punteros del reloj.



   En trigonometría nosotros solo consideramos ángulos de 0° a 360°. Y solo nos interesa donde o mejor en que cuadrante fue a parar el lado móvil, no importando si dio muchas vueltas antes, si giro en sentido contrario o igual que el reloj.
   Lo importante es, cual es el ángulo que forma con la dirección positiva del eje x. (Es decir el ángulo positivo). Entonces en trigonometría siempre podemos adicionar o substraer 1 giro (360°) o varios giros a un ángulo sin que cambie nada en el aspecto trigonométrico.
   Esto no es verdad en física, pues si tenemos un cuerpo un movimiento circular el número de vueltas que el móvil hace en la ciudad de tiempo no puede ser manipulado o cambiado.
   Esta propiedad es utilizada para transformar un ángulo negativo en ángulo positivo.
   Ej.: $-60° = -60° + 360° = 300°$……………………………IV Cuadrante
   $-280° = -280° + 360° = 80°$………………………….…I Cuadrante
   $-480° = -480° + 720° = 240°$…………………………..III Cuadrante
   También es utilizado para transformar en ángulo mayor de un giro en un ángulo mayor de un giro en un ángulo menor de 1 giro (360°)

   $1520° = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \begin{array}{r|l} 1520 & 360 \\ \cline{2-2} 080 & \ 4 \end{array}$
   $1520° = 1520° - 4 \times 360° = 1520° - 1440° = 80°$
   $1520° = 80°$

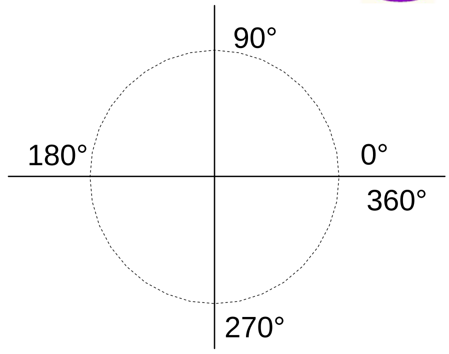
   Luego en trigonometría:

   $0° = 360°$

4. Medidas de los arcos o ángulos:

   En trigonometría son utilidades tres sistemas de medidas.

   a) Sistema sexagesimal: (grado sexagesimal) Es el sistema que divide un giro completo en 360 partes iguales y a cada uno de estas partes lo llama grado sexagesimal.



      1 giro $= 360°$ grados sexagesimales

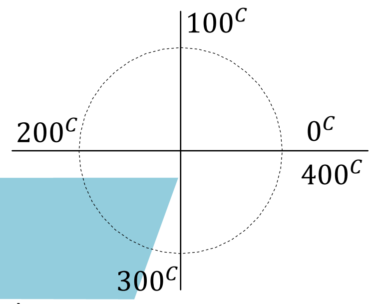
$$1° = 60'$$
$$1' = 60''$$

      A su vez el grado sexagesimal es dividido en 60 minutos (partes iguales) $= 60'$. Y cada minuto se subdivide nuevamente en 60 segundos sexagesimales $= 60''$

      En este sistema cada cuadrante mide 90°

   b) Sistema centesimal: (grado centesimal)

      Es el sistema que divide el ángulo de 1 giro en 400 partes iguales y a cada uno lo llama grado centesimal 400^C. Los submúltiplos son:



      $1^C = 100\ m$

      $1^m = 100^{\text{seg}}$

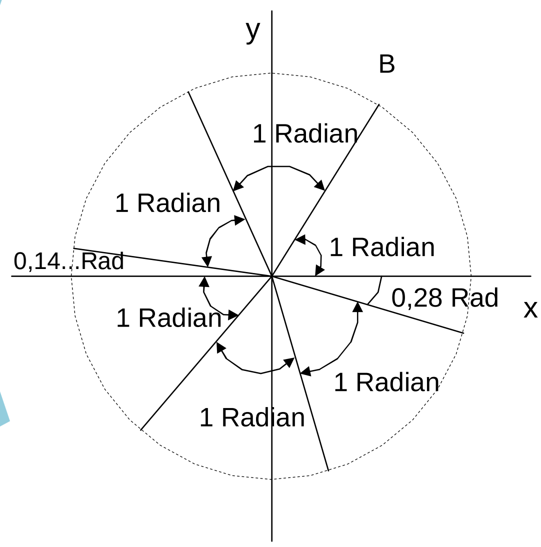
      Este sistema posee la ventaja por ser centesimal de ser fácilmente transformado los minutos y segundos a grado centesimal.

      En este sistema cada cuadrante mide 100^C

   c) Sistema circular o Radian:

      Para ser instaurado este sistema de medida angular fue estilizado conceptos de geometría plana.

      Nosotros sabemos que cualquier cia tiene por perímetro.



$$Cia = 2\pi R = 6{,}28\ R$$

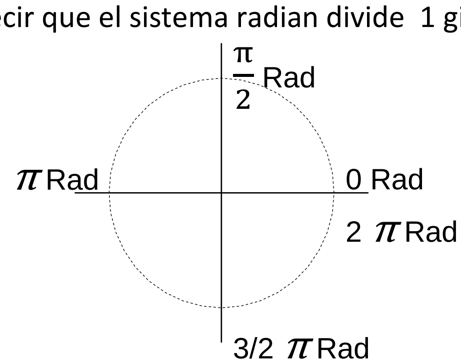
      Es decir que la longitud de una cia es 6,28…. Veces el radio.

      En otras palabras si agarramos la medida longitudinal del radio de una cia, y lo medimos el arco de dicha cia, encontraremos que cabe 6,28 veces. Y esto ocurre con cualquier cia.

      Al ángulo central que subtiende un arco igual al radio se lo denomina ángulo de 1 Radian.

      Y la cia completa tendrá 6,28 Radianes, para ser más precisos decimos 2π Radianes pues $\pi = 3{,}1416\ldots$

      Entonces podemos decir que el sistema radian divide 1 giro en 2π Radianes.



      1 Cuadrante $= \frac{\pi}{2}$ Rad

5. Relaciones entre los 3 sistemas de medida angulares:

   Las relaciones que rigen entre los 3 sistemas de medida angulares son:

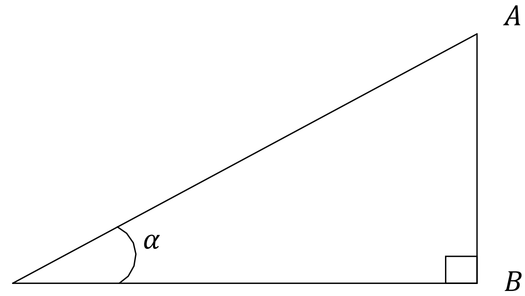
$$180° = 200^C = \pi\ Rad$$

   Cualquier transformación de un sistema a otro es echo por simple regla de tres utilizando la relación.

Funciones Trigonométrica:

Las funciones trigonométricas son definidas en un triángulo rectángulo. Sea el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABO}$

Definimos:



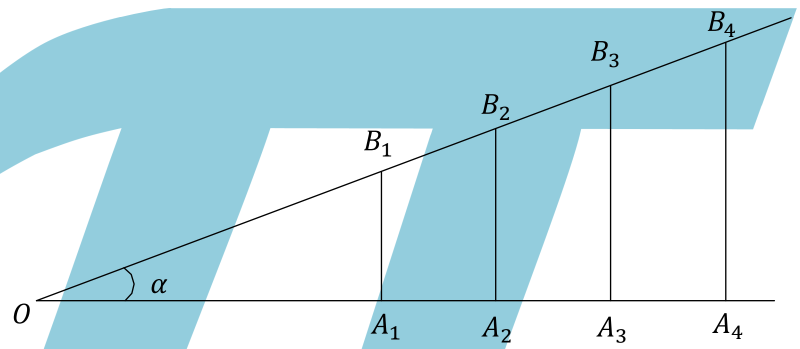
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{cat.op}{hipotenusa} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$$

$$\cos\alpha = \frac{cat.Ady}{hipotenusa} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{cat.op}{cat.Ady} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$$

Notemos pues estas funciones son razones, cocientes o relaciones entre dos segmentos, es decir estamos nuevamente en las proporciones geométricas.

Para poder visualizar y entender mejor vamos a ampliar más los conceptos.



Todos los triángulos $\overset{\Delta}{OA_1B_1}$, $\overset{\Delta}{OA_2B_2}$, $\overset{\Delta}{OA_3B_3}$ y $\overset{\Delta}{OA_4B_4}$……………son Δ semejantes.

Luego la relación entre los lados homólogos será siempre igual, por ejemplo:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \frac{A_3B_3}{OB_3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \frac{A_3B_3}{OA_3}$$

Entonces la función trigonométrica de un ángulo es siempre la misma independiente de cuales segmentos homólogos sean considerados e independientes del tamaño del triángulo considerado.

Para no tener que estar diciendo a menudo la función al revés de la tangente o del seno etc., fueron definidos más tres funciones.

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{hipotenusa}{cat.opuesto} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}$$

$$\sec\alpha = \frac{hipotenusa}{cat.Ady.} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$$

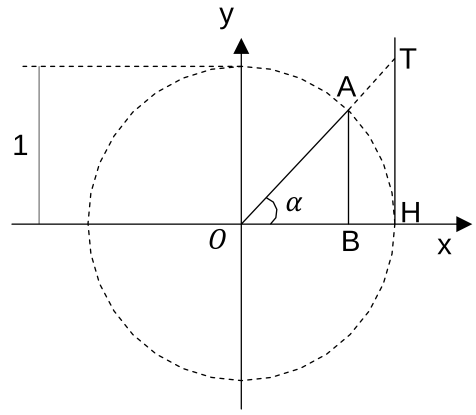
$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{cat.Ady}{cat.opuesto} = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$$

OBS.: Estos tres últimas funciones que fueron definidas son las inversas de las tres anteriores.

2. Cia Trigonométrica: llamamos cia trigonométrica a la que tiene $R = 1$ (unidad)

En trigonometría esta cia es muy útil pues simplifica los resultados de las funciones trigonométricas, y nosotros sabemos que las proporciones permanecen inmutables pues estamos lidiando con triángulos semejantes.

Vamos a utilizar las definiciones de las funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo de la cia trigonométrica.



$$\overline{OA} = R = 1$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{cat.op}{hip.} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB}$$

Esto quiere decir que en la cia trigonométrica el seno α está representado por el segmento $\overline{AB}$

$$\cos\alpha = \frac{cat.Ady}{hipot.} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{1} = \overline{OB}$$

Esto quiere decir que en la cia trigonométrica el $\cos\alpha$ está representado por el segmento $\overline{OB}$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{cat.op.}{cat.Ady} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} \dots\dots\dots\dots.(1)$$

Para poder saber cuál es el segmento que representa a la $\operatorname{tg}\alpha$ en la cia trigonométrica usamos el concepto de geometría (triángulo semejantes)

$$\overset{\Delta}{OAB} - S - \overset{\Delta}{OTH}$$

$$\frac{AB}{OB} = \frac{TH}{OH} \dots\dots\dots\dots(2)$$

Luego:

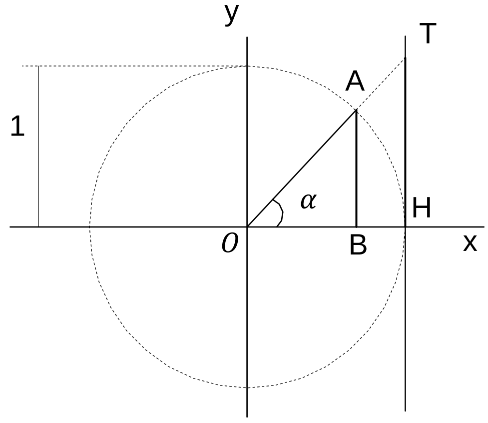
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{TH}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{TH}}{1} = \overline{TH}$$

Es decir la tg α en la cia trigonométrica está representada por el segmento de la tangente a la cia entre el origen y la prolongación del radio vector.

3. Signos en los 4 cuadrantes:

Conociendo los segmentos que representan a las funciones trigonométricas en los 4 cuadrantes podemos, fácilmente saber cuál es el signo de cada función en cualquier cuadrante.

a) PRIMER CUADRANTE:



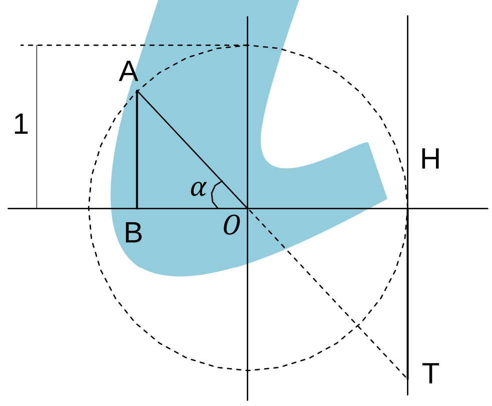
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{+}{+} = + \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow \ \overline{AB} = +$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{+}{+} = + \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow \ \overline{OB} = +$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{TH}{OH} = \frac{+}{+} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow \ \overline{TH} = +$$

Todas las funciones en el primer cuadrante son positivas y tienen el mismo signo que sus segmentos representativos. Las funciones inversas mantienen el mismo signo de sus opuestos.

b) SEGUNDO CUADRANTE:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{+}{+} = + \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow \ \overline{AB} = +$$

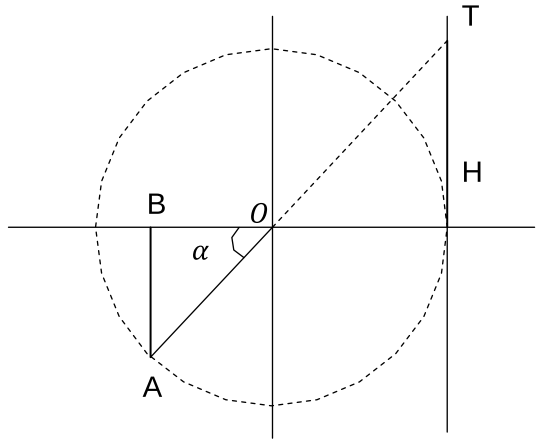
$$\cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{-}{+} = - \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow \ \overline{OB} = -$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{+}{-} = - \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow \ \overline{HT} = -$$

Solamente el $\operatorname{sen}\alpha$ en el segundo cuadrante es positivo $\cos\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha$ son negativas y nuevamente coinciden con el signo de sus segmentos representativos.

Las funciones opuestas tienen el mismo signo de sus respectivas

c) TERCER CUADRANTE:



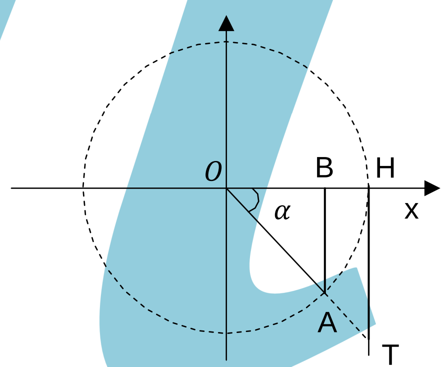
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{-}{+} = - \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \rightarrow \quad \overline{AB} = -$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{-}{+} = - \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \rightarrow \quad \overline{OB} = -$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{-}{-} = + \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \rightarrow \quad \overline{TH} = +$$

Nuevamente tenemos coincidencia de los signos de las funciones con sus segmentos representativos.

d) CUARTO CUADRANTE:



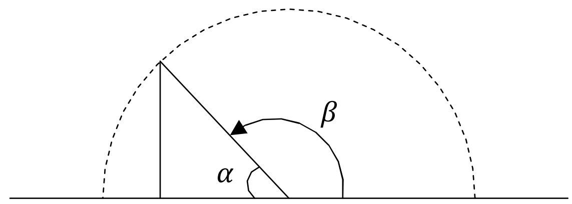
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{-}{+} = - \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \rightarrow \quad \overline{AB} = -$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{+}{+} = + \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \rightarrow \quad \overline{OB} = -$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{-}{+} = - \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \rightarrow \quad \overline{TH} = -$$

REDUCCION DE FUNCIONES DE ARCOS AL PRIMER CUADRANTE:

a) Reducción de funciones de arcos del segundo cuadrante a funciones de arcos del primer cuadrante. Para conseguir estas reducciones utilizamos el teorema relativo a los arcos suplementarios.



β …………………………. ángulo del segundo cuadrante α y β son suplementarios $\alpha + \beta = \pi$

Luego: $\beta = \pi - \alpha$

$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

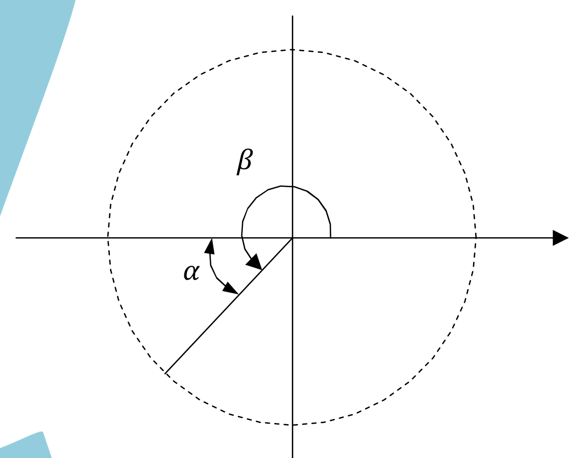
$\cos\beta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

b) Reducción de funciones de arcos del tercer cuadrante a funciones de arcos del primer cuadrante. Para conseguir estas reducciones utilizamos el teorema relativo a los arcos que difieren en una semicircunferencia positiva.

β ……………… ángulo del tercer cuadrante

$\beta = \pi + \alpha$



$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\cos\beta = \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

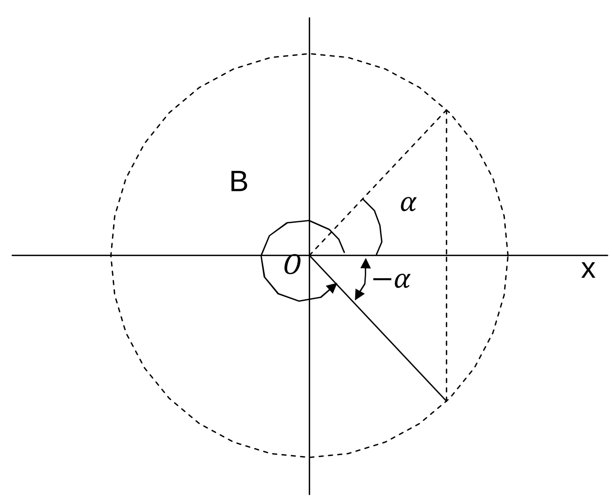
$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

c) Reducciones de funciones de arcos del cuadrante a funciones de arco del primer cuadrante

Utilizamos el teorema relativo a ángulos simétricos.

β…………………ángulo del cuarto cuadrante

$\beta = 360° - \alpha$



$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\cos\beta = \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$

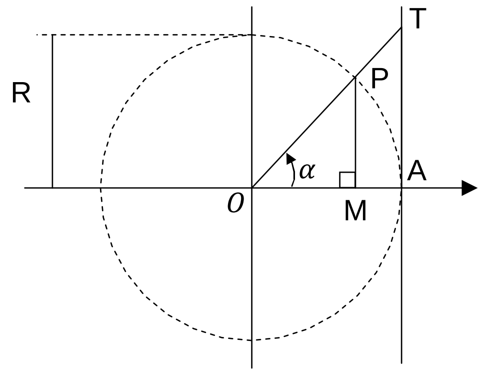
$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

III FORMULAS DEL PRIMER GRUPO:

FORMULAS FUNDAMENTALES

1- Deducción de las cinco formulas fundamentales.

En las funciones trigonométricas de un mismo ángulo se verifican algunas relaciones fundamentales.



Vamos a demostrar las relaciones fundamentales de una forma general, para una cia de radio R. en el triángulo $\overset{\Delta}{OMP}$ tenemos:

$\overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{PM}^2$.. Relación Pitagórica.

Dividiendo ambos miembros de esta igualdad por $\overline{OP}^2$ tendremos:

$$\frac{\overline{OP}^2}{\overline{OP}^2} = \left(\frac{\overline{OM}}{\overline{OP}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{PM}}{\overline{OP}}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

Por definición de la función tangente tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\overline{PM}}{\overline{OP}} \ldots\ldots\ldots.. \\ \cos\alpha = \dfrac{OM}{OP} \ldots\ldots\ldots.. \end{array}\right\} \ldots\ldots.(2)$$

También: $\dfrac{\overline{OP}^2}{\overline{OP}^2} = 1$

Llevando estas relaciones en (1) tendremos:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Por definición de la función tangente tenemos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{PM}}{\overline{OM}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Dividiendo el numerador y el denominador del segundo miembro de (3) por $\overline{OP}$, la fracción no varía y podemos escribir…

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{\overline{PM}}{\overline{OP}}}{\frac{\overline{OM}}{\overline{OP}}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Llevando (2) en (4) tendremos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Nuevamente por definición de la función tangente $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\overline{PM}}{\overline{OM}}$ que también podemos escribir:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{PM}}{\overline{OM}} = \frac{1}{\frac{\overline{OM}}{\overline{PM}}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Por definición de la función cotangente tenemos:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\overline{OM}}{\overline{PM}} \ldots\ldots\ldots.(6)$$

(6) en (5)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$$

Análogamente tendremos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{1}{\frac{\overline{OP}}{\overline{PM}}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots.(7)$$

$$\textit{Pero por definición} \quad cosec\,\alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{PM}} \dots\dots\dots(8)$$

(8) en (7)

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}$$

<u>IDEM:</u> $\cos\alpha = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} = \frac{1}{\frac{\overline{OP}}{\overline{OM}}} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$$

Resumiendo tenemos las 5 formulas fundamentales:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \dots\dots\dots\dots\dots..(a)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(b)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..\dots(c)$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(d)$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(e)$$

Es bueno acostumbrarse a algunas fórmulas derivadas de estos:

a) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \\ \cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha \\ \cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} \end{array}\right.$

b) $\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha} \end{array}$ .... $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha\,.\operatorname{cotg}\alpha = 1 \\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \end{array}\right.$

c) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}$..................... $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen}\alpha\,.\operatorname{cosec}\alpha = 1 \\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \end{array}\right.$

d) $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} \dots\dots\dots\dots\dots$ $\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha\,.\sec\alpha = 1 \\ \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \end{array}\right.$

RELACION TRIGONOMETRICA ADICIONAL:

Esta fórmula que vamos a deducir a continuación no está en el programa como una relación fundamental pero algunos autores lo consideran como tal debido a su importancia para resolver muchas cuestiones lo vamos a deducir con la resalva siguiente:

"Cuando lo utilizamos debemos hacer la deducción rápida como calculo auxiliar"

Partiendo de la relación fundamental.

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\ldots\ldots(1)$$

Dividiendo ambos miembros de (1) por $\cos^2\alpha$ tendremos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

O mejor:

$$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\sec^2\alpha$$

Dividiendo la ecuación (1) por $\operatorname{sen}^2\alpha$

Tendremos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

O mejor:

$$1+\operatorname{cotg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha$$

DEDUCCION DE LAS FORMULAS DEL SENO E COSENO DE UN ARCO EN FUNCION DE LA TANGENTE Y COTANGENTE DEL MISMO ARCO

a) Deducción del seno en función de la tangente y cotangente.

Partimos de la relación fundamental:

$$1 = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

Dividiendo ambos miembros por $\operatorname{sen}^2 \alpha$ tendremos

$$\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha$$

O mejor:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha$$

Luego:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}}$$

Pero

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

b) Deducción del coseno en función de la tangente y de la cotangente.

Partimos de la relación fundamental.

$$1 = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

Dividimos ambos miembros por $\cos^2 \alpha$ y tendremos:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1$$

O mejor:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1$$

Luego:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

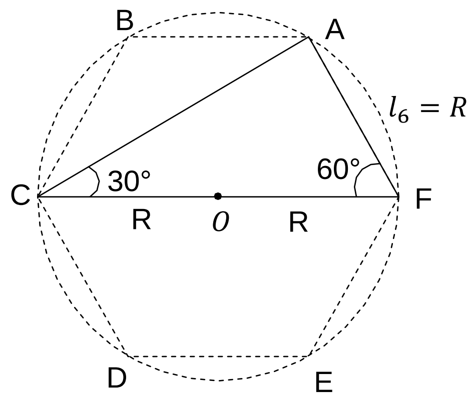
Pero

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{cotg}^2 \alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{cotg}^2 \alpha}}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}}$$

Calculo de los valores de las funciones trigonométricas de 30° y 60°



Sea el hexágono regular inscripto en la cia O cuyo radio es R.

Uniendo los vértices $\overline{CA}$ y $\overline{CF}$ tenemos formado el triángulo $\overset{\Delta}{CAF}$

$\overset{\angle}{A} = 1\angle\, Recto$............................... por estar inscripto en una semicircunferencia.

$\overset{\angle}{C} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{6} = 30°$......................Medida de un ángulo inscripto.

$\overset{\angle}{F} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} = 60°$....................... Ángulo inscripto

Además por geometría sabemos que

$$\overline{AF} = l_6 = R$$
$$\overline{CF} = 2R$$

Luego aplicando Pitágoras tendremos:

$$\overline{AC}^2 = (2R)^2 - R^2 = 4R^2 - R^2 = \sqrt{3}R^2$$
$$\overline{AC} = R\sqrt{3}$$

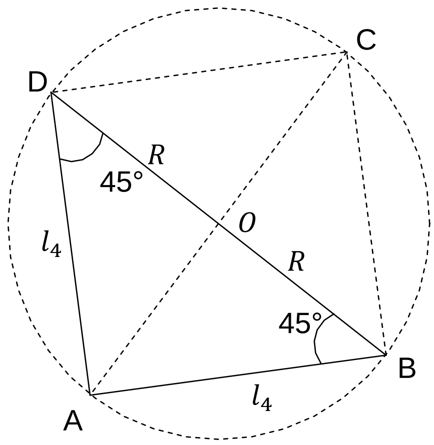
Por definición de las funciones trigonométricas tendremos:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{\overline{AF}}{\overline{CF}} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$
$$\cos 30° = \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}} = \frac{R\sqrt{3}}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{R}{R.\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Análogamente en el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{CAF}$ por definición:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}} = \frac{R\sqrt{3}}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 60° = \frac{\overline{AF}}{\overline{CF}} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$
$$\operatorname{tg} 60° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = \frac{R\sqrt{3}}{R} = \sqrt{3}$$

Calculo de los valores de las funciones trigonométricas de 45°



Sea el cuadrado ABCD inscripto en la cia O de radio R.

Trazando la diagonal $\overline{DB}$ se forma el triángulo $\overset{\Delta}{DAB}$…………… $\overset{\angle}{A}$_ ángulo inscripto en semicircunferencia.
En este triángulo tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \overline{AB} = l_4 = R\sqrt{2} \\ \overline{AD} = l_4 = R\sqrt{2} \\ \overline{DB} = 2R \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \overset{\Delta}{DAB} \text{ es un triangulo rectangulo isosceles.} \\ A \text{ lados iguales se opone angulos iguales.} \\ \qquad\qquad \overset{\angle}{D} = \overset{\angle}{B} = 45° \end{array}$$

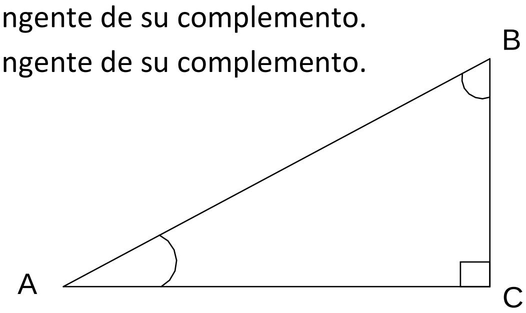
$$\operatorname{sen} 45° = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\sqrt{2}R}{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\sqrt{2}R}{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{2}R} = 1$$

TEOREMAS RELATIVOS A LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ARCOS COMPLEMENTARIOS.

a) La tangente de un ángulo agudo es igual a la cotangente de su complemento.
La cotangente de un ángulo agudo es igual a la tangente de su complemento.



Consideremos el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$

Por geometría sabemos:

$$\overset{\angle}{A}+\overset{\angle}{B}=90°\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \overset{\angle}{B}=90°-\overset{\angle}{A} \\ \overset{\angle}{A}=90°-\overset{\angle}{B} \end{cases}$$

Por definición de las funciones tg y cotg tenemos:

$$\operatorname{tg}\overset{\angle}{A}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$\operatorname{cotg}\overset{\angle}{B}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\ldots(2)$$

Los segundos miembros son iguales luego:

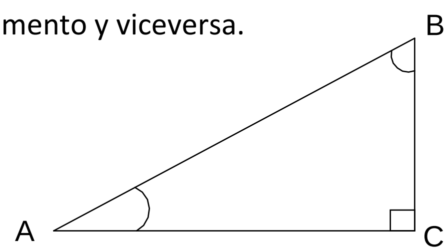
$$\operatorname{tg}\overset{\angle}{A}=\operatorname{cotg}\overset{\angle}{B}=\operatorname{cotg}\left(90°-\overset{\angle}{A}\right)$$

$$\operatorname{tg}\overset{\angle}{A}=\operatorname{cotg}\left(90°-\overset{\angle}{A}\right)$$

Análogamente podemos demostrar que:

$$\operatorname{cotg}\overset{\angle}{A}=\operatorname{tg}\left(90°-\overset{\angle}{A}\right)$$

b) El seno de cualquier ángulo es igual al coseno de su complemento y viceversa.



Consideremos el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$

$$\overset{\angle}{A}+\overset{\angle}{B}=90°\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \overset{\angle}{B}=90°-\overset{\angle}{A} \\ \overset{\angle}{A}=90°-\overset{\angle}{B} \end{cases}$$

Por definición de las funciones trigonométricas seno y coseno podemos escribir:

$$\operatorname{sen}\overset{\angle}{A}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$\cos\overset{\angle}{B}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

Luego: $\operatorname{sen}\overset{\angle}{A}=\cos\overset{\angle}{B}=\cos\left(90°-\overset{\angle}{A}\right)$

$$\operatorname{sen}\overset{\angle}{A}=\cos\left(90°-\overset{\angle}{A}\right)$$

Análogamente $\quad \cos\overset{\angle}{A}=\operatorname{sen}\left(90°-\overset{\angle}{A}\right)$

c) La secante de cualquier ángulo agudo es igual a la cosecante de un complemento y viceversa.
OBS: El proceso demostrativo es análogo a los anteriores.

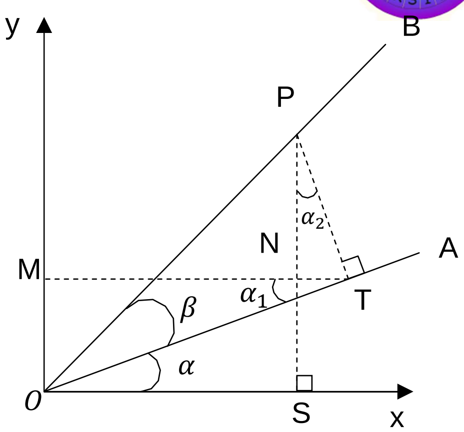
Luego: $\sec\overset{\angle}{A}=\operatorname{cosec}\left(90°-\overset{\angle}{A}\right)$

$$\operatorname{cosec}\overset{\angle}{A}=\sec\left(90°-\overset{\angle}{A}\right)$$

Resumiendo podemos escribir:
"Cualquier función trigonométrica de un ángulo es igual a la cofunción de su complementario"

a) Seno de la suma y diferencia de dos ángulos:

Vamos a considerar dos ángulos α y β, uno consecutivo del otro, con vértice común coincidente con el origen O de coordenadas cartesianas (XOY) tal como ilustramos en la figura.



$\alpha = \overset{\angle}{XOA}$; $\beta = \overset{\angle}{AOB}$; $\alpha + \beta = \overset{\angle}{XOB}$

$\overline{OA}$.........lado común a α y β.

Por un punto cualquiera P de la semirecta $\overline{OB}$ trazamos las perpendiculares a $\overline{OX}$ y $\overline{OA}$.

Entonces por definición de la función seno tendremos:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{\overline{PS}}{\overline{OP}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

De la misma forma para el ángulo β, por definición de las funciones seno y coseno tenemos:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\overline{PT}}{\overline{OP}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{OT}}{\overline{OP}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Observando la figura tenemos:

$\alpha = \alpha_1 \ldots\ldots\ldots$ Alternos internos

$\alpha = \alpha_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ Lados respectivamente perpendiculares.

Luego: $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ y podemos escribir.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{OM}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{NS}}{\overline{OT}} \quad \text{y} \quad \cos\alpha = \frac{\overline{PN}}{\overline{PT}}$$

De estas expresiones resultan:

$$\overline{NS} = \overline{OT}\operatorname{sen}\alpha$$
$$\overline{PN} = \overline{PT}\cos\alpha$$

Si sumamos los segmentos $\overline{PN}$ y $\overline{NS}$ obtenemos:

$$\overline{PS} = \overline{NS} + \overline{PN} = \overline{OT}\operatorname{sen}\alpha + \overline{PT}\cos\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

(4) en (1)..........$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \dfrac{\overline{\mathrm{OT}}\operatorname{sen}\alpha + \overline{\mathrm{PT}}\cos\alpha}{\overline{\mathrm{OP}}}$

O .... $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \dfrac{\overline{\mathrm{OT}}}{\overline{\mathrm{OP}}}\operatorname{sen}\alpha + \dfrac{\overline{\mathrm{PT}}}{\overline{\mathrm{OP}}}\cos\alpha$

Llevando (2) y (3) en esta última expresión tenemos:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Para deducir la expresión correspondiente al seno de la diferencia entre dos ángulos empleamos un artificio algebraico.

$$a - b = a + (-b)$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}[\alpha + (-\beta)]$$

Aplicando la formula anterior para la suma tendremos:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha \,.\, \cos(-\beta) + \cos\alpha \,.\, \operatorname{sen}(-\beta)$$

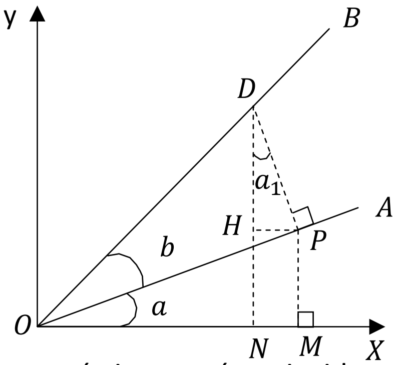
Por funciones de ángulos simétricos sabemos

$$\begin{cases} \cos(-\beta) = \cos\beta \\ \operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

Llevando estas expresiones en la anterior tenemos:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

b) Coseno de la suma y diferencia de dos ángulos



$a = \overset{\angle}{XOA}$

$b = \overset{\angle}{AOB}$

$a + b = \overset{\angle}{XOB}$

$\overline{OA}$..........lado común

Consideremos los ángulos consecutivos a y b, son vértice común coincidente con el origen O de coordenadas cartesianas XOY

Por un punto cualquiera P de OA, tracemos:

$$\overline{PM} \perp \overline{OX}$$
$$\overline{PD} \perp \overline{OA}$$

Por el punto D tracemos $\overline{DN} \perp \overline{OX}$

Tracemos además por el punto P.........$\overline{PH} \perp \overline{DN}$

Consideremos los triángulos rectángulos $\begin{cases} \overset{\Delta}{OMP} \\ \overset{\Delta}{OPD} \\ \overset{\Delta}{DHP} \end{cases}$

$\overset{\Delta}{OMP} - S - \overset{\Delta}{DHP} \ldots\ldots\ldots\ldots \overset{\angle}{a} = \overset{\angle}{a_1} \ldots$.... Lados perpendiculares.

Por definición de la función coseno

$$\cos(a+b) = \frac{\overline{ON}}{\overline{OD}} \ldots \ldots (1)$$

En la figura podemos ver

$$\overline{ON} = \overline{OM} - \overline{NM} = \overline{OM} - \overline{PH} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(2) en (1)

$$\cos(a+b) = \frac{\overline{OM} - \overline{PH}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OD}} - \frac{\overline{PH}}{\overline{OD}}$$

Multiplicando el numerador y denominador de la primera fracción por $\overline{OP}$ y el numerador y denominador de la segunda fracción por $\overline{PD}$, tendremos:

$$\cos(a+b) = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} \cdot \frac{\overline{OP}}{\overline{OD}} - \frac{\overline{PH}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{PD}}{\overline{OD}} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Pero:

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{OM}}{\overline{OP}} = \cos a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \dfrac{\overline{OP}}{\overline{OD}} = \cos b \\ \dfrac{\overline{PH}}{\overline{PD}} = \operatorname{sen} a \ldots\ldots\ldots\ldots \left(\overset{\angle}{a_1} = \overset{\angle}{a}\right) \ldots\ldots \dfrac{\overline{PD}}{\overline{OD}} = \operatorname{sen} b \end{cases}$$

Llevando estos valores en (3) tenemos:

$$\cos(a+b) = \cos a \,.\cos b - \operatorname{sen} a \,.\operatorname{sen} b$$

Para calcular el coseno de la diferencia de dos ángulos, utilizamos el artificio algebraico.

$$\cos(a-b) = \cos[a + (-b)] =$$
$$\cos(a-b) = \cos a \,.\cos(-b) - \operatorname{sen} a \,.\operatorname{sen}(-b) \ldots\ldots\ldots (4)$$

Pero por ángulos simétricos.......$\begin{cases} \cos(-b) = \cos b \\ \operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen} b \end{cases}$

Sustituyendo en (4) tendremos:

$$\cos(a-b) = \cos a \,.\cos b + \operatorname{sen} a \,.\operatorname{sen} b$$

c) Tangente de la suma y diferencia de dos ángulos

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\operatorname{sen}a\,.\cos b+\cos a\,.\operatorname{sen}b}{\cos a\cos b-\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}$$

Dividiendo numerador y denominador por $\cos a\,.\cos b$ tendremos:

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}a\,.\cos b+\cos a\,.\operatorname{sen}b}{\cos a\,.\cos b}}{\dfrac{\cos a\,.\cos b-\operatorname{sen}a\,.\operatorname{sen}b}{\cos a\,.\cos b}}$$

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}a\cos b}{\cos a\cos b}+\dfrac{\cos a\operatorname{sen}b}{\cos a\cos b}}{\dfrac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}-\dfrac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}$$

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}a}{\cos a}+\dfrac{\operatorname{sen}b}{\cos b}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}a}{\cos a}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}b}{\cos b}}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Pero:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}a}{\cos a}=\tan a\\ \frac{\operatorname{sen}b}{\cos b}=\tan b\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\text{en }(1)$$

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\,.\operatorname{tg}b}$$

Para calcular la tangente de la diferencia de dos arcos utilizamos el artificio algebraico:

$$\operatorname{tg}(a-b)=\operatorname{tg}[a+(-b)]$$

Y aplicamos la fórmula de la suma:

$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}(-b)}{1-\operatorname{tg}a\,.\operatorname{tg}(-b)}\ldots\ldots\ldots(2)$$

Pero:

$$\operatorname{tg}(-b)=-\operatorname{tg}b\ldots\ldots\ldots..\text{en }(2)$$

Y tendremos:

$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\,.\operatorname{tg}b}$$

d) Cotangente de la suma y diferencia de dos ángulos.

$$\operatorname{cotg}(a+b)=\frac{\cos(a+b)}{\operatorname{sen}(a+b)}=\frac{\cos a\cos b-\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a\cos b+\cos a\operatorname{sen} b}$$

Dividiendo numerador y denominador por $\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b$, tendremos:

$$\operatorname{cotg}(a+b)=\frac{\dfrac{\cos a\cos b}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b}-\dfrac{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b}}{\dfrac{\operatorname{sen} a\cos b}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b}+\dfrac{\cos a\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b}}$$

$$\operatorname{cotg}(a+B)=\frac{\dfrac{\cos a}{\operatorname{sen} a}\cdot\dfrac{\cos b}{\operatorname{sen} b}-1}{\dfrac{\cos b}{\operatorname{sen} b}+\dfrac{\cos a}{\operatorname{sen} a}}\ \ldots\ldots(1)$$

Pero:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\cos a}{\operatorname{sen} a}=\operatorname{cotg} a\\ \dfrac{\cos b}{\operatorname{sen} b}=\operatorname{cotg} b\end{array}\right\}\ \text{en } (1)$$

Tendremos:

$$\operatorname{cotg}(a+b)=\frac{\operatorname{cotg} a\operatorname{cotg} b-1}{\operatorname{cotg} b+\operatorname{cotg} a}$$

$$\operatorname{cotg}(a-b)=\operatorname{cotg}[a+(-b)]$$

$$\operatorname{cotg}(a-b)=\frac{\operatorname{cotg} a\operatorname{cotg}(-b)-1}{\operatorname{cotg}(-b)+\operatorname{cotg} a}\ \ldots\ldots\ldots(2)$$

Pero

$$\operatorname{cotg}(-b)=-\operatorname{cotg} b\ \ldots\ldots\ \text{en }\ (2)$$

$$\operatorname{cotg}(a-b)=\frac{-\operatorname{cotg} a\operatorname{cotg} b-1}{-\operatorname{cotg} b+\operatorname{cotg} a}$$

Que multiplicando por (-1) numerador y denominador tendremos:

$$\operatorname{cotg}(a-b)=\frac{\operatorname{cotg} a\operatorname{cotg} b+1}{\operatorname{cotg} b-\operatorname{cotg} a}$$

DEDUCCION DE LAS FORMULAS DE LAS FUNCIONES DEL ARCO DOBLE.

a) Calculo de $\operatorname{sen} 2\alpha$

Si en la igualdad $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

Hacemos: $\alpha = \beta$ resulta:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha$$
$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

b) Calculo de $\cos 2\alpha$

Si en la igualdad:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Hacemos: $\alpha = \beta$ tendremos:

$$\cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

c) Calculo de $\operatorname{tg} 2\alpha$

Si en la igualdad:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Hacemos $\alpha = \beta$ tendremos:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha}$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

FUNCIONES DEL ARCO MITAD

De la fórmula del arco doble:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$

Podemos obtener estos dos equivalentes:

$$\cos 2a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .(1)$$
$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .(2)$$

Si hacemos: $2a = \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \rightarrow a = \frac{\alpha}{2}$

Llevando estas dos relaciones en (1)

Tendremos:

$$\cos\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$
$$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$
$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

Llevando las mismas relaciones en (2)

Tendremos:

$$\cos a = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$
$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

FORMULAS DEL TERCER GRUPO

a) Transformación en producto de la suma y diferencia de dos senos de dos arcos

Si $\overset{\angle}{p}$ y $\overset{\angle}{q}$ son dos ángulos

Y hacemos:

$$\begin{cases} \overset{\angle}{p} + \overset{\angle}{q} = \overset{\angle}{A} \dots\dots\dots (1) \\ \overset{\angle}{p} - \overset{\angle}{q} = \overset{\angle}{B} \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

Tendremos:

$$\begin{cases} \overset{\angle}{p} = \dfrac{\overset{\angle}{A} + \overset{\angle}{B}}{2} \dots\dots\dots (3) \\ \overset{\angle}{q} = \dfrac{\overset{\angle}{A} - \overset{\angle}{B}}{2} \dots\dots\dots (4) \end{cases}$$

De las formulas: seno de la suma y diferencia de dos arcos tenemos:

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}\left(\overset{\angle}{p} + \overset{\angle}{q}\right) = \operatorname{sen} \overset{\angle}{p} \cos \overset{\angle}{q} + \operatorname{sen} \overset{\angle}{q} \cos \overset{\angle}{p}$$

$$\operatorname{sen} B = \operatorname{sen}\left(\overset{\angle}{p} - \overset{\angle}{q}\right) = \operatorname{sen} \overset{\angle}{p} \cos \overset{\angle}{q} - \operatorname{sen} \overset{\angle}{q} \cos \overset{\angle}{p}$$

Sumando $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = \operatorname{sen}\left(\overset{\angle}{p} + \overset{\angle}{q}\right) + \operatorname{sen}\left(\overset{\angle}{p} - \overset{\angle}{q}\right) = 2 \operatorname{sen} \overset{\angle}{p} \cos \overset{\angle}{q} \dots\dots\dots (5)$

Sustituyendo (1) (2) (3) y (4) en (5) tendremos:

$$\operatorname{sen} \overset{\angle}{A} + \operatorname{sen} \overset{\angle}{B} = 2. \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} . \cos \frac{A-B}{2}$$

Para transformar en producto la diferencia de los senos de dos arcos, restamos las igualdades

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}\left(\overset{\angle}{p} + \overset{\angle}{q}\right) = \operatorname{sen} \overset{\angle}{p} \cos \overset{\angle}{q} + \operatorname{sen} \overset{\angle}{q} \cos \overset{\angle}{p}$$

$$-\operatorname{sen} B = -\operatorname{sen}\left(\overset{\angle}{p} - \overset{\angle}{q}\right) = -\operatorname{sen} \overset{\angle}{p} \cos \overset{\angle}{q} + \operatorname{sen} \overset{\angle}{q} \cos \overset{\angle}{p}$$

Tendremos: $\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = \operatorname{sen}\left(\overset{\angle}{p} + \overset{\angle}{q}\right) - \operatorname{sen}\left(\overset{\angle}{p} - \overset{\angle}{q}\right) = 2 \operatorname{sen} \overset{\angle}{p} \cos \overset{\angle}{q} \dots\dots\dots (6)$

Sustituyendo (1) (2) (3) y (4) en (6)

$$\operatorname{sen} \overset{\angle}{A} - \operatorname{sen} \overset{\angle}{B} = 2. \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} . \cos \frac{A+B}{2}$$

b) Transformaciones en producto de la suma y diferencia de dos cosenos de dos arcos.

Si $\overset{\angle}{p}$ y $\overset{\angle}{q}$ son dos ángulos

Y hacemos:

$$\begin{cases} \overset{\angle}{p} + \overset{\angle}{q} = \overset{\angle}{A} \dots\dots\dots\dots (1) \\ \overset{\angle}{p} - \overset{\angle}{q} = \overset{\angle}{B} \dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

Tendremos:

$$\begin{cases} \overset{\angle}{p} = \dfrac{\overset{\angle}{A} + \overset{\angle}{B}}{2} \dots\dots\dots\dots. (3) \\ \overset{\angle}{q} = \dfrac{\overset{\angle}{A} - \overset{\angle}{B}}{2} \dots\dots\dots\dots.. (4) \end{cases}$$

De las formulas: coseno de la suma y diferencia de dos arcos tenemos.

$$\cos \overset{\angle}{A} = \cos\left(\overset{\angle}{p} + \overset{\angle}{q}\right) = \cos \overset{\angle}{p} \cos \overset{\angle}{q} - \operatorname{sen} \overset{\angle}{p} \operatorname{sen} \overset{\angle}{q}$$

$$\cos \overset{\angle}{B} = \cos\left(\overset{\angle}{p} - \overset{\angle}{q}\right) = \cos \overset{\angle}{p} \cos \overset{\angle}{q} + \operatorname{sen} \overset{\angle}{p} \operatorname{sen} \overset{\angle}{q}$$

Sumando: $$\cos \overset{\angle}{A} + \cos \overset{\angle}{B} = \cos\left(\overset{\angle}{p} + \overset{\angle}{q}\right) + \cos\left(\overset{\angle}{p} - \overset{\angle}{q}\right) = 2\cos \overset{\angle}{p} . \cos \overset{\angle}{q} \dots\dots\dots. (5)$$

Sustituyendo (1) (2) (3) y (4) en (5)

Tendremos:

$$\cos \overset{\angle}{A} + \cos \overset{\angle}{B} = 2. \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

De la formulas: coseno de la suma y diferencia de dos arcos. Tendremos:

$$\cos \overset{\angle}{A} = \cos\left(\overset{\angle}{p} + \overset{\angle}{q}\right) = \cos \overset{\angle}{p} \cos \overset{\angle}{q} - \operatorname{sen} \overset{\angle}{p} \operatorname{sen} \overset{\angle}{q}$$

$$-\cos \overset{\angle}{B} = -\cos\left(\overset{\angle}{p} - \overset{\angle}{q}\right) = -\cos \overset{\angle}{p} \cos \overset{\angle}{q} - \operatorname{sen} \overset{\angle}{p} \operatorname{sen} \overset{\angle}{q}$$

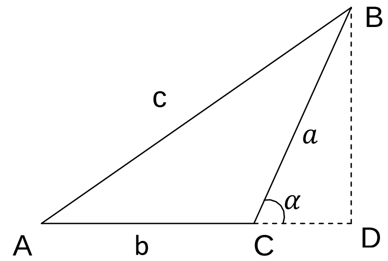
Restando: $$\cos \overset{\angle}{A} - \cos \overset{\angle}{B} = \cos\left(\overset{\angle}{p} + \overset{\angle}{q}\right) - \cos\left(\overset{\angle}{p} - \overset{\angle}{q}\right) = -2\cos \overset{\angle}{p} . \cos \overset{\angle}{q} \dots\dots.. (6)$$

Llevando (1) (2) (3) y (4) en (6)

Tendremos:

$$\cos \overset{\angle}{A} - \cos \overset{\angle}{B} = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

TEOREMA 3: En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.



H) Sea $\overset{\Delta}{ABC}$ un triángulo cualquiera, siendo sus lados a, b y c

T)

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\overset{\angle}{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\overset{\angle}{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\overset{\angle}{C}}$$

D) Por el vértice B se traza la recta $\overline{BD}$ que es $\perp\overline{AC}$

En el triángulo $\overset{\Delta}{ABD}$ rectángulo, tenemos por definición de la función seno.

$$\operatorname{sen}\overset{\angle}{A}=\frac{\overline{BD}}{c}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

En el triángulo $\overset{\Delta}{CDB}$ también rectángulo tenemos:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\overline{BD}}{a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Pero:

$$\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\left(180°-\overset{\angle}{C}\right)=\operatorname{sen}\overset{\angle}{C}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(3)$$

Porque el seno de un ángulo obtuso es igual al seno de su suplementario.

Sustituyendo (3) en (2) tendremos:

$$\operatorname{sen}\overset{\angle}{C}=\frac{\overline{BD}}{a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(4)$$

Dividiendo miembro a miembro las igualdades (1) y (4) tendremos:

$$\frac{\operatorname{sen}\overset{\angle}{A}}{\operatorname{sen}\overset{\angle}{C}}=\frac{\frac{\overline{BD}}{c}}{\frac{\overline{BD}}{a}}=\frac{a}{c}$$

O mejor:

$$\frac{\operatorname{sen}\overset{\angle}{A}}{\operatorname{sen}\overset{\angle}{C}}=\frac{a}{c}\ldots\ldots\ldots\ldots.\text{que utilizando las propiedades de las proporciones.}$$

Tendremos:

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\overset{\angle}{C}}=\frac{a}{\operatorname{sen}\overset{\angle}{A}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(5)$$

Análogamente trazando por el vértice C del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ una $\perp\overline{AB}$, podemos demostrar.

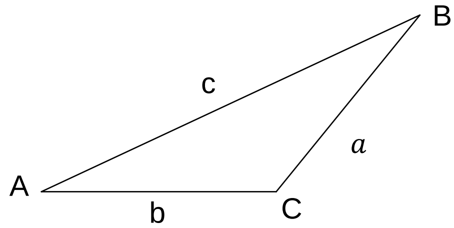
$$\frac{\operatorname{sen}\overset{\angle}{A}}{\operatorname{sen}\overset{\angle}{C}}=\frac{a}{c}\quad\text{que tambien podemos escribir en la forma:}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\overset{\angle}{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\overset{\angle}{B}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(6)$$

De (5) y (6) tendremos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\overset{\angle}{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\overset{\angle}{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\overset{\angle}{C}}$$

TEOREMA 4: En todo triángulo, la suma de dos lados es a su diferencia como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos a esos lados es a la tangente de la semidiferencia de los mismos.



H) $\overset{\Delta}{ABC}$ triángulo cualquiera siendo a, b y c sus lados.

T)

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\overset{\angle}{A}+\overset{\angle}{B}}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\overset{\angle}{A}-\overset{\angle}{B}}{2}\right)}$$

D) En el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, aplicamos la ley de los senos tendremos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\overset{\angle}{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\overset{\angle}{B}} \qquad o \qquad \frac{a}{b}=\frac{\operatorname{sen}\overset{\angle}{A}}{\operatorname{sen}\overset{\angle}{B}}$$

Aplicando la propiedad de las proposiciones tendremos:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{sen}\overset{\angle}{A}+\operatorname{sen}\overset{\angle}{B}}{\operatorname{sen}\overset{\angle}{A}-\operatorname{sen}\overset{\angle}{B}}$$

Empleando las formulas trigonométricas de transformación de sumas y diferencias de los senos en productos tendremos:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\overset{\angle}{A}+\overset{\angle}{B}}{2}\right)\cos\left(\frac{\overset{\angle}{A}-\overset{\angle}{B}}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\overset{\angle}{A}+\overset{\angle}{B}}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\overset{\angle}{A}-\overset{\angle}{B}}{2}\right)}$$

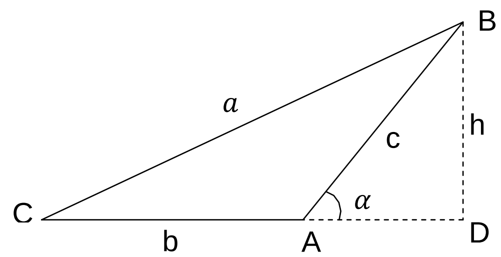
$$\frac{a+b}{a-b}=\operatorname{tg}\left(\frac{\overset{\angle}{A}+\overset{\angle}{B}}{2}\right).\operatorname{cotg}\left(\frac{\overset{\angle}{A}-\overset{\angle}{B}}{2}\right)$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\overset{\angle}{A}+\overset{\angle}{B}}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\overset{\angle}{A}-\overset{\angle}{B}}{2}\right)}$$

Análogamente también podríamos demostrar:

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\overset{\angle}{C}+\overset{\angle}{A}}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\overset{\angle}{C}-\overset{\angle}{A}}{2}\right)}$$

TEOREMA 5: En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido entre los mismos.



H) Sea $\overset{\Delta}{ABC}$ un triángulo cualquiera, siendo a , b y c sus lados.

T) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \overset{\angle}{A}$$

D) Por el vértice B trazamos una $\perp$ al lado AC y sea D el pie de la $\perp$.

En el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABD}$ tendremos:

$$h^2 = c^2 - \overline{AD}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Teorema de pitagoras}$$

En el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{CBD}$ tendremos:

$$h^2 = a^2 - (b + \overline{AD})^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Teorema de Pitagoras}$$

Los primeros miembros de (1) y (2) son iguales.

Luego: $$a^2 - (b + \overline{AD})^2 = c^2 - \overline{AD}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Que desarrollando las operaciones indicadas y transponiendo términos, tendremos:

$$a^2 - b^2 - 2\,b\,\overline{AD} - \overline{AD}^2 = c^2 - \overline{AD}^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b\,\overline{AD} \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

En el triángulo $\overset{\Delta}{ADB}$ rectángulo tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AD}}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Pero los ángulos $\overset{\angle}{A}$ y $\overset{\angle}{\alpha}$ son suplementarios.

Luego: $$\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha) = -\cos\overset{\angle}{A} \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Los primeros miembros de (5) y (6) son iguales.

Luego: $$\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\mathrm{c}} = -\cos\overset{\angle}{A}$$

O también: $$\overline{AD} = -c.\cos\overset{\angle}{A} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

(7) en (4)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,c\,\cos\overset{\angle}{A}$$

Análogamente podemos demostrar que:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos\overset{\angle}{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\overset{\angle}{C}$$

EJERCICIOS DE TRIGONOMETRIA

1) Expresar los siguientes ángulos en el sistema circular o radian.

a) $225°$
b) $300°$
c) $140°$
d) $270°$
e) $120°$
f) $225°$
g) 300^G
h) $150^G\ 70^m$
i) 220^G

2) Expresar los siguientes ángulos en el sistema sexagesimal.

a) $5\pi\ Rad$
b) $\frac{\pi}{12}\ Rad$
c) $\frac{8\pi}{5}\ Rad$
d) $\frac{\pi}{9}\ Rad$
e) $\frac{12\pi}{19}\ Rad$
f) $\frac{3\pi}{2}\ Rad$
g) 120^G
h) $85^G\ 40^m$
i) $50^G\ 20^m\ 30^{seg}$

3) Transformar los siguientes ángulos en un ángulo positivo menor que 360°

a) $15.850°$
b) $-7.453°$
c) $-85\ \pi\ Rad$
d) 25.500^G
e) $\frac{143}{5}\ \pi\ Rad$
f) $-20°$
g) $-185.428°$
h) $-\frac{3\pi}{2}$
i) $-\ 360°$

4) Haciendo un gráfico a escala, usando regla y transferidor. Calcular las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a) 43°
b) 15°
c) 37°
d) 28°
e) 56°
f) 80°

5) Un aeroplano que precisamente está sobrevolando un puerto de observación que se halla a 3.000 m de una batería antiaérea. Desde la batería, el ángulo de elevación del avión es de 27°. Determinar la altura del avión.

6) Una torre de $40\ m$ de altura proyectora una sombra de $70\ m$. Determinar el ángulo de elevación del sol en ese instante.

7) El altímetro (instrumento para medir alturas) de un aeroplano de reconocimiento indica 2.000 m sobre el nivel del mar cuando pasa sobre su portaaviones.
En el mismo instante se detecta la presencia de un submarino, cuyo ángulo de depresión desde el aeroplano, es de 25° ¿Cuál será la distancia entre el submarino y el barco?

8) El vigía de un barco determina que la cima de un risco, señalado en su carta con una altura de 130 m por encima del nivel del mar, forma un ángulo de 6° con la horizontal al nivel de su ojo. Si el vigía está a 7m sobre el nivel del mar. ¿A qué distancia está el barco de la costa?

9) Una escalera se apoya contra un muro de tal modo que su extremo está a 10 m del suelo y su base a 2,50 m del muro. ¿Qué ángulo forma la escalera con el muro?

10) ¿Crece el valor numérico del seno de un ángulo en la misma proporción que crece el ángulo? ¿Es $\operatorname{sen} 84°$ igual al doble de $\operatorname{sen} 42°$?

11) Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 3,25 m cada uno y el ángulo del vértice es de 28°. Determinar, la base, la altura, los otros ángulos y el área del triángulo.

12) Si una carretera tiene una pendiente de 8° 45’ y una señal se halla sobre la carretera a 150 m del pie de la pendiente, determinar la distancia horizontal entre el pie de la pendiente y el pie de la señal.

13) La altura de un rectángulo es 17 m y su diagonal 30 m. Determinar el ángulo que forma la diagonal con la base.

14) En un triángulo rectángulo ABC, con ángulo recto en C, el lado AB es cinco veces mayor que el lado AC. ¿Cuánto mide el ángulo en A?

15) Mientras vuela a una altura de 1.000 m, un piloto observa que el ángulo de depresión de un aeropuerto es de 10° 40’ ¿A qué distancia está el, en ese instante de un punto del aeropuerto?

16) Un camino tiene una pendiente de 12° 30’ respecto de la horizontal ¿Cuánto asciende el camino por cada 25 m horizontales?

17) Teniendo en cuenta el triángulo de la figura.
Resolver completamente los siguientes triángulos rectángulos.

a) $\cos\beta = 0{,}8$ y $b = 15m$
b) $b = 60\ m$ y $\operatorname{cosec}\beta = 1{,}88$
c) $c = 82\ m$ $\quad \operatorname{sen}\beta = 0{,}33$
d) $a = 60\ m$ $\quad c = 30\ m$
e) $a = 96\ m$ $\quad \operatorname{cotg}\alpha = 0{,}7$
f) $c = 24\ m$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = 2$

18) Expresar cada uno como función de un ángulo menor de 45°

a) $\operatorname{tg} 83°$
b) $\cos 71°$
c) $\sec 60°\ 30'$
d) $\operatorname{sen} 48°\ 48'$
e) $\operatorname{cotg} 51°\ 43'$
f) $\operatorname{cosec}\ 89°$

19) Clasificar las siguientes expresiones como verdadero o falso.

a) $\operatorname{sen} 17° = \dfrac{1}{\operatorname{cosec} 73°}$
b) $\operatorname{tg} A = \operatorname{cotg}(90° + A)$
c) $\sec 47° . \cos 47° = 1$
d) $\cos 38°\ 14' = \operatorname{sen} 51°\ 46'$
e) $\cos B = \dfrac{1}{\operatorname{sen B}}$
f) $\operatorname{cosec}\ 83° = \sec 7°$
g) $\dfrac{1}{\operatorname{tg C}} = \operatorname{tg} C$
h) $\operatorname{sen} B = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}(90-B)}$
i) $1 = \operatorname{tg} A . \operatorname{cotg} A$
j) $\operatorname{cotg}\ 18°\ 18' = \operatorname{tg}\ 71°\ 42'$

20) Calcular el valor numérico de las siguientes expresiones.

a) $\operatorname{tg} 45°\ \operatorname{sen}^2 60°$
b) $\sqrt{2}\ \cos 60°\ \operatorname{cotg}^2 45°$
c) $\operatorname{sen}^2\ 30° - \cos^2 45° + \operatorname{tg} 60°$
d) $5\ \operatorname{sen} 30° - 3\sqrt{2}\ \operatorname{sen} 45° + \frac{1}{2}\ \operatorname{cotg} 45°$
e) $(\operatorname{tg} 60° + \operatorname{cotg} 45°)(\operatorname{tg} 60° - \operatorname{cotg} 45°)$
f) $(\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 60°)^2$
g) $\dfrac{\operatorname{cotg} 30°}{6 \operatorname{sen} 45°}$
h) $\dfrac{\operatorname{cosec}^2 30°}{3\ \cos^2 45°}$
i) $\dfrac{\cos 45° + \operatorname{sen} 45°}{\operatorname{cosec} 45°}$
j) $\dfrac{2\ \operatorname{sen} 60°}{\operatorname{cotg} 30° - 4 \operatorname{sen} 45°}$
k) $\operatorname{sen} 90° - \cos 0° + 2 \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 45°$
l) $\dfrac{\operatorname{tg} 0° + \cos 0°}{\cos 90° - \operatorname{tg} 0° + \operatorname{sen} 90°}$
m) $(\dfrac{4 \operatorname{sen} 30°}{\operatorname{tg} 60°} - \operatorname{tg} 30°) \operatorname{cotg} 30°$
n) $3\left(\dfrac{\sec 45°\ \operatorname{tg} 30°}{\cos 60°}\right)^2 - \operatorname{sen} 90°$
o) $\frac{3}{4} \operatorname{tg} 45° + 4 \cos^2 30° + \dfrac{1}{\sec 60°} - \operatorname{cotg}^2 30°$
p) $\operatorname{tg}^2 60° + 3 \sec^2 30° - 4 \cos^4 45°$
q) $(\cos 30° - \cos 45°)(2 \cos 30° + 3 \cos 45°)$
r) $\dfrac{\operatorname{sen} 45° + \cos 45°}{\sec 60° \operatorname{cosec} 90°} + \frac{1}{2} \sec 45° + \operatorname{tg} 60°$

---

21)

a) Si $x = 30°$; demostrar que $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
b) Si $x = 60°$; demostrar que $\cos^2 \frac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{2}$
c) Si $x = 60°$; demostrar que $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

22) Un avión despega de un aeropuerto y después de volar $50\ km$ se encuentra al sur de un punto que se halla a 25 km al este del aeropuerto. Determinar el rumbo del aeropuerto desde el avión en el momento de la observación.

23) Volando a una altura de 3.000 m, un observador, mide los ángulos de depresión de las orillas opuestas del amazonas y resultan ser de 48° y 25°, respectivamente ¿Qué anchura tiene el rio en el lugar de la observación?

24) Un avión está a 2.000 m de altura y a 5 km de la costa. Asciende entonces con un ángulo de 30° respecto de la horizontal y vuela en dirección a la costa ¿Qué altura lleva el avión cuando pasa sobre la costa?

25) Un asta de bandera está colocada verticalmente en el remate de una torre. Desde un punto situado a 30 m del pie de la torre y frente al asta; los ángulos de elevación al extremo superior y a la base del asta son de 51° y 47°, respectivamente. Si el ojo del observación está a 1,60 m del suelo, determinar.

   a) La altura de la torre.
   b) La altura del asta.

26) Un poste se ha partido en un punto situado a 4 m del suelo, pero no se encuentra completamente roto. El extremo descansa sobre el suelo formando con él un ángulo de 20° ¿Qué altura tenía el poste?

27) Determinar las demás funciones en los siguientes casos:

   a) $\operatorname{tg} y = \frac{5}{12}$
   b) $\cos 2 = \frac{4}{5}$
   c) $\sec x = \frac{7}{5}$
   d) $\operatorname{sen} A = \frac{4}{9}$
   e) $\operatorname{cotg} B = \frac{8}{15}$
   f) $\operatorname{cosec} z = \frac{3}{2}$

---

28)

   a) Siendo $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{9}$, averiguar las demás funciones de α, sabiendo que α pertenece al segundo cuadrante.
   b) Dado $\operatorname{cotg}\alpha = +\sqrt{\frac{2}{3}}$ encontrar los valores de las demás funciones trigonométricas de α, sabiendo que α es del tercer cuadrante.
   c) Siendo $\cos\beta = \frac{3}{5}$, y $270° < \beta < 360°$. Hallar los demás funciones de β.

29) Encontrar la función equivalente del primer cuadrante.

   a) $\cos 425°$
   b) $\operatorname{sen} 235°$
   c) $\operatorname{sen} 340°$
   d) $\sec 118°$
   e) $\operatorname{tg} 3581°$
   f) $\operatorname{cotg} 330°$

30) Hallar las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos, expresando el resultado como una función de un ángulo perteneciente al primer cuadrante.

   a) 390°
   b) 225°
   c) – 2345°
   d) – 145°
   e) 8523°
   f) 720°

31) Hallar las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos, expresando el resultado como una función de un ángulo del segundo cuadrante.

   a) 230°
   b) 330°
   c) 1371°
   d) – 170°
   e) – 5840°
   f) 20°

32) Hallar las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos expresando el resultado como una función de un ángulo del tercer cuadrante.

   a) 135°
   b) 585°
   c) – 1342°

d) 3758° 30’ e) 56° f) 315°

33) Hallar las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos, expresando el resultado en función de un ángulo del cuarto cuadrante.

a) 140° c) – 591° e) 350°

b) 210° d) 4158° f) -15°

34) Hallar el valor numérico de las siguientes expresiones matemáticas.

a) $\mathrm{tg}^2\,120° - 2\,\mathrm{cotg}\,225° + \mathrm{cosec}\,330°$

b) $\cos^2 300° - \mathrm{sen}\,270° + (\mathrm{cotg}\,210° - \mathrm{sen}\,120°)^2$

c) $\dfrac{\mathrm{sen}\,120°}{\mathrm{tg}\,150°} - \mathrm{cosec}^2\,210° - \sqrt{2}\,\sec 315° + \cos 300°$

d) $\dfrac{1}{3}\left(\mathrm{cosec}\,120° - \mathrm{tg}\,150°\right)^2 - \mathrm{sen}\,240°\,\mathrm{cotg}\,210°$

e) $\dfrac{\mathrm{tg}\,315°}{\cos 240°} + \dfrac{3}{2}\sec^2 150° - 6\left(\mathrm{cotg}\,30° - \mathrm{sen}\,60°\right) + 3\,\mathrm{tg}\,240°$

f) $0{,}75\ \mathrm{tg}\,225° + \dfrac{\mathrm{cosec}^2\,300°}{\cos^2 135°\,\mathrm{cotg}^2\,240°} + \dfrac{1}{\sec^2 300°}$

g) $\dfrac{\mathrm{cosec}\,225°\,\mathrm{sen}\,315°}{\mathrm{cotg}\,765°\cos 210°\sec 300°}$

h) $\dfrac{0{,}4\cos 120° + 0{,}5\sec 300°}{\mathrm{tg}^2\,150°} + \dfrac{1}{5}\mathrm{cotg}^4\,210°$

i) $\dfrac{2(\mathrm{sen}\,135° - \cos 135°)^2}{\sec 60°\,\mathrm{cosec}\,90°} + \mathrm{tg}^2\,120° - 3\,\mathrm{cotg}\,240° - 2\cos 210°$

j) $\dfrac{\left(\mathrm{cosec}^2\,315° + \mathrm{tg}^2\,600°\right)^2}{\mathrm{sen}\,390°} - \dfrac{6\cos 690°\sec 750°}{\mathrm{sen}^3\,510°} + \mathrm{cosec}\,210°$

35) Escribir cada una de las funciones de θ.

a) En términos de sen θ.

b) En términos de cos θ.

c) En términos de tg θ.

d) En términos de sec θ.

e) En términos de cosec θ.

f) En términos de cotg θ.

36) Decir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si θ crece de 90° a 180°; cos θ decrece de 0 a – 1.

b) Si θ decrece de 90° a 0°; sen θ crece de 0 a 1.

c) Si θ crece de 270° a 360°; sec θ decrece de ∞ a 1.

d) Si θ crece de 180° a 270°; cotg θ decrece de 1 a 0.

e) Si θ decrece de 180° a 90°; cosec θ decrece de ∞ a 1.

f) Si θ crece de 0° a 90°; tg θ crece de 1 a ∞.

37) ¿En qué cuadrante o cuadrantes ocurren los siguientes cambios?

a) El seno y la tangente crecen.

b) El coseno decrece y la tangente crece.

c) La cotangente y el seno decrecen.

d) La tangente y la secante crecen.

e) El seno crece y la cotangente decrece.

38) Calcular por trigonometría el área de la figura abajo:

39) Hallar el valor de θ , sabiendo

a) $\operatorname{sen} 5\theta = \cos 4\theta$
b) $\sec(\theta + 5°) = \operatorname{cosec} 4\theta$
c) $\operatorname{tg}(5\theta + 2°) = \operatorname{cotg} 3\theta$
d) $\operatorname{tg} 3\theta \operatorname{tg} 7\theta = 1$

40) Si $\cos\alpha = \frac{m}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .0° < \alpha < 90°$. Hallar el valor de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha$ en función de m.

41) Hallar el valor de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos.

a) $\frac{\pi}{4}$
b) $\frac{\pi}{2}$
c) $\frac{3\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{3}$
e) $\frac{5\pi}{6}$
f) $\frac{2\pi}{3}$
g) $\frac{3\pi}{2}$
h) π
i) $\frac{7\pi}{6}$
j) $\frac{5\pi}{4}$

42) Hallar el valor del ángulo $\overset{\angle}{A}$, sabiendo:

a) $\overset{\angle}{A} = \text{angulo } \operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\overset{\angle}{A} = \text{angulo } \operatorname{tg}(-\sqrt{3})$
c) $\overset{\angle}{A} = \text{angulo } \operatorname{cosec} 2$
d) $\overset{\angle}{A} = \text{angulo } \operatorname{cotg}(-1)$
e) $\overset{\angle}{A} = \text{angulo } \operatorname{sen}\left[\text{angulo } \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
f) $\overset{\angle}{A} = \text{angulo } \operatorname{tg}\left[\text{angulo } \sec\sqrt{2}\right]$

43) Comprobar cada una de las siguientes identidades:

a) $1 = 2\cos x \sec x - \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x$
b) $\sec^2 y = \operatorname{cosec} y \operatorname{sen} y + \frac{1}{\operatorname{cotg}^2 y}$
c) $\sec^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x$
d) $\operatorname{sen}\theta\,(\operatorname{cosec}\theta - \sec\theta) = 1 - \tan\theta$
e) $\frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{tg}\theta}{1+\sec\theta} = \operatorname{sen}\theta$
f) $\frac{\operatorname{sen} B}{\sec B} = \frac{\operatorname{cotg} B}{\operatorname{cosec}^2 B}$
g) $\frac{\operatorname{cotg} A}{\sec A} = \frac{1}{\operatorname{sen} A} - \operatorname{sen}\theta$
h) $\cos\theta \operatorname{sen}\theta\,(\operatorname{cotg}\theta + \operatorname{tg}\theta) = \sec^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta$
i) $\frac{\operatorname{cosec}\theta}{\cos\theta} = (1 + \operatorname{tg}^2\theta)\operatorname{cotg}\theta$
j) $1 + \frac{1}{\cos A} = \frac{\operatorname{tg}^2 A}{\sec A - 1}$
k) $(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 1$
l) $\frac{1+\operatorname{cotg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta} = \operatorname{cotg}^2\theta$
m) $\operatorname{sen}^4\theta - \cos^4\theta = \operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta$
n) $\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 2\operatorname{cosec}\theta$
o) $\cos^2 y\,(1 + \operatorname{cotg}^2 y) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y}$
p) $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\sec\theta}{\operatorname{sen}\theta}$
q) $1 - \operatorname{tg}^4 A = 2\sec^2 A - \sec^4 A$
r) $\operatorname{cotg}\theta\,(\operatorname{sen}\theta - \sec\theta) = \cos\theta - \operatorname{cosec}\theta$
s) $\operatorname{cotg}(90 - \theta) = \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{1+\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}$

44) Verificar las siguientes identidades:

a) $\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} = \sec\alpha - \cos\alpha$
b) $\sec^2\alpha\,(\operatorname{cosec}^2\alpha - 1) = \operatorname{cosec}^2\alpha$
c) $\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cosec}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{tg}\alpha}$
d) $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha}$
e) $\frac{\cos B}{1+\operatorname{sen} B} + (1 + \operatorname{sen} B)\sec B = \frac{2}{\operatorname{sen}(90-B)}$
f) $\operatorname{cotg} A \sec A = \frac{1}{\cos(90-A)}$
g) $\frac{1+\cos A}{1-\cos A} = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} A} + \frac{1}{\operatorname{tg} A}\right)^2$
h) $\operatorname{tg} x \operatorname{sen}(180 - x) + \operatorname{sen}(90 - x) = \sec x$

45) Una asta de bandera que tiene x metros de altura está colocada sobre una torre. Desde el extremo superior del asta el ángulo de depresión de un punto sobre el suelo y situado a d metros de la torre es α y desde el pie del asta el ángulo de depresión al mismo punto es β. Determinar que:

$$d = \frac{x}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$$

46) Siendo $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{6}$ y $\cos\beta = \frac{2}{3}$. Calcular:

a) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ b) $\cos(\alpha-\beta)$ c) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$

47) Siendo $\sec\alpha = \frac{5}{2}$ y $\cos\beta = \frac{1}{2}$. Hallar:

a) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ b) $\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)$ c) $\operatorname{cosec}(\alpha-\beta)$

48) Sabiendo que $\operatorname{sen}\frac{12}{13}$ y $\cos\beta = \frac{3}{5}$. Hallar:

a) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$
b) $\operatorname{sen} 2\beta$
c) $\cos\frac{\alpha}{2}$
d) $\operatorname{tg} 2\alpha$
e) $\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$

49) Dados $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{5}$ y $\cos\beta = \frac{5}{6}$, y siendo α y β del primer cuadrante. Calcular:

a) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$
b) $\operatorname{tg} 2\alpha$
c) $\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)$
d) $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$
e) $\sec\frac{\beta}{2}$
f) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$
g) $\operatorname{sen} 2\alpha$
h) $\operatorname{cotg} 2\alpha$
i) $\sec\frac{\alpha}{2}$
j) $\operatorname{cosec}\frac{\beta}{2}$
k) $\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)$

50) Hallar todos los valores de los ángulos comprendidos entre 0 y 2π Radianes.

a) $\sec^2 A = \frac{4}{3}$
b) $2\operatorname{sen}\theta + 1 = 0$
c) $(\operatorname{sen}x+1)(\cos x-1) = 0$
d) $2\operatorname{sen}x\cos x = \operatorname{sen}x$
e) $\operatorname{sen}y = \operatorname{tg}y$
f) $2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta - 3 = 0$
g) $\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x + 2 = 0$
h) $\sqrt{3}\operatorname{tg}x = -1$
i) $2\operatorname{sen}^2 A + \cos A = 1$
j) $\operatorname{sen}^2\theta = \operatorname{sen}\theta$
k) $(2\operatorname{tg}x - 3)\cos x = 0$
l) $\operatorname{tg}(180-x) = 2$
m) $3\cos\theta\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\theta$
n) $3\operatorname{sen}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{sen}x = 0$
o) $2\operatorname{tg}3x = -1$
p) $3\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$
q) $\cos x - 2 = \sec x$
r) $2\sec^2 x = 7 - \operatorname{tg}x$
s) $2\cos^2 x + 5\operatorname{sen}x = -1$

a) $2\operatorname{sen}^2 x - 1 = \cos x$
b) $3\cos^2 x - 2 = 3\cos x$
c) $4\operatorname{sen}x - 5 = -6$
d) $\frac{\operatorname{sen}x+1}{2\operatorname{sen}x-3} = 1$
e) $\sec^2 x - 3\sec x = 0$
f) $\operatorname{sen}^2 A = \operatorname{sen}A\cos A$
g) $\operatorname{sen}^2 A = \operatorname{sen}A\cos A$
h) $\operatorname{sen}x = \operatorname{sen}80°$
i) $\cos(40-x) = \cos x$
j) $\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$
k) $\cos x + 2\operatorname{sen}x = 2$
l) $\operatorname{cosec}x = \sec x$
m) $2\cos x\operatorname{tg}x - 1 = 0$
n) $4\cos^2 x = 3 - 4\cos x$
o) $\cos^2 x = \frac{3(1-\operatorname{sen}x)}{2}$
p) $3\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 3$
q) $2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}x = 0$

51) Resolver las ecuaciones para $0° \le x \le 360°$

a) $\cos x + 2\operatorname{sen}^2 x = 1$
b) $\cos x = \sqrt{3}\operatorname{sen}x$
c) $\sqrt{3}\operatorname{sen}x = \cos x$
d) $\operatorname{tg}^2 x + 3 = 2\sec^2 x$

e) $\operatorname{cosec}^2 x = 2\operatorname{cotg}^2 x$

f) $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$

g) $\cos 2x = \cos^2 x$

h) $\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} 2x$

i) $3\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} 2x$

52) Demostrar: $\operatorname{cotg} A \,.\, \sec A = \frac{1}{\cos(90°-A)}$

53) Resolver la ecuación: $2\operatorname{sen}\theta + 1 = \cos\theta$

54) Si x es un ángulo obtuso tal que $\operatorname{sen} x = \frac{m}{4}$. Calcular las demás funciones de x.

55) Demostrar:

$$\frac{\cos B}{1+\operatorname{sen} B} + (1+\operatorname{sen} B)\sec B = \frac{2}{\operatorname{sen}(90°-B)}$$

56) Resolver la ecuación para $x < 360°$

$$(2\cos x + 1)(\operatorname{tg} x + 1) = 0$$

57) Demostrar:

$$\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\right)^2$$

58) Si $A = \operatorname{arctg}(-1)$, determinar el valor principal de A y calcular: $(\operatorname{sen} A + \sec A)$

59) Expresar: $\left(1 - \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}\right).\operatorname{tg}^2\theta$ en función de $\operatorname{sen}\theta$

60) Demostrar $\operatorname{tg} x \operatorname{sen}(180° - x) + \operatorname{sen}(90° - x) = \sec x$

61) Hallar el valor de $\frac{\operatorname{cosec}^2 300° - \operatorname{tg} 225° \operatorname{sen} 270°}{\sec 120° \sec 180°}$

62) Escribir en otra forma las expresiones:

a) $\operatorname{sen} 37° \cos 22° + \cos 37° \operatorname{sen} 22°$

b) $\cos 37° \cos 22° - \operatorname{sen} 37° \operatorname{sen} 22°$

63) Demostrar:

a) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$

b) $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

c) $\operatorname{sen} 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

d) $\cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

e) $\operatorname{sen}(\theta + 45°) = \frac{\sqrt{2}(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)}{2}$

f) $\cos(\theta + 45°) = \frac{\sqrt{2}(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)}{2}$

g) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta$

h) $\cos(45° - \theta) = \operatorname{sen}(45° + \theta)$

i) $\cos(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = (\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta - \operatorname{sen}\beta)$

j) $\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$

k) $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta$

64) Escribir las expresiones en forma equivalente:

a) $\frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y}$

b) $\frac{\operatorname{cotg} P \operatorname{cotg} Q + 1}{\operatorname{cotg} Q - \operatorname{cotg} P}$

c) $\frac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}(\alpha-\theta)}{1 - \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}(\alpha-\theta)}$

65) Demostrar:

a) $\operatorname{tg}(45° - \theta) = \frac{1-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta}$

b) $\operatorname{cotg}(45° + \theta) = \frac{\operatorname{cotg}\ \theta-1}{\operatorname{cotg}\ \theta+1}$

c) $\operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3}$

d) $\operatorname{cotg} 15° = 2 + \sqrt{3}$

66) Determinar el valor de $\operatorname{sen} 3\theta$ en términos de $\cos\theta$.

67) Determinar el valor de $\operatorname{tg} 3\theta$ en términos de $\operatorname{tg}\theta$.

68) ¿Qué formula conduce a $\operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\beta\right).\cos\left(\frac{1}{2}\beta\right)$

69) Sin emplear maquinita, calcular el valor de:

a) $\operatorname{tg} 105°$
b) $\cos 75°$
c) $\operatorname{tg} 15°$
d) $\operatorname{sen} 105°$
e) $\operatorname{sen} 15°$
f) $\cos 22{,}5°$

70) Deducir las fórmulas de las siguientes expresiones en función de (2θ) y después (θ)

a) $\operatorname{sen} 4\theta$
b) $\cos 4\theta$
c) $\operatorname{tg} 4\theta$

71) Resolver las ecuaciones para todos los valores comprendidos entre 0° y 360°.

a) $\operatorname{sen} 2\theta\,(2\cos\theta + 1) = 0$
b) $\cos 2\theta - \operatorname{sen}\theta = 1$
c) $\operatorname{sen} 2\theta = \operatorname{tg}\theta$
d) $\frac{1}{\sec 2\theta} + \frac{3}{2} = \frac{2}{\sec\theta}$
e) $\operatorname{tg} 2\theta + \operatorname{tg}\theta = \frac{5}{\operatorname{cotg}\theta}$
f) $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta$
g) $\cos 2\theta = \operatorname{sen}\theta$
h) $\operatorname{sen} 2\theta + \cos\theta = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$
i) $\operatorname{cotg}\theta\operatorname{tg} 2\theta = 3$
j) $\operatorname{tg} 2\theta = -\frac{2}{\operatorname{cosec}\theta}$

72) Verificar las siguientes identidades:

a) $\frac{1}{\sec 2\theta} = \cos^4\theta - \operatorname{sen}^4\theta$
b) $(\operatorname{sen} x - \cos x)^2 = 1 - \operatorname{sen} 2x$
c) $\frac{2}{\operatorname{cotg} y \operatorname{tg} 2y} = 1 - \operatorname{tg}^2 y$
d) $\frac{2-\sec^2\theta}{\sec^2\theta} = \frac{1}{\sec 2\theta}$
e) $\operatorname{cotg}\theta - \operatorname{tg}\theta = 2\operatorname{cotg}\ 2\theta$
f) $\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta} = \operatorname{sen} 2\theta$
g) $1 + \operatorname{cotg}\theta\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos(\theta-\alpha)}{\operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}\alpha}$
h) $\frac{\operatorname{sen} A+\cos A}{\cos A-\operatorname{sen} A} + \frac{\operatorname{sen} A-\cos A}{\operatorname{sen} A+\cos A} = 2\operatorname{tg} 2A$
i) $\frac{\operatorname{sen} 2\theta+\cos\theta}{\cos\theta} = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$
j) $\operatorname{cotg}\theta\operatorname{tg} 2\theta = 3$
k) $\operatorname{tg} 2\theta = -\frac{2}{\operatorname{cosec}\theta}$
l) $\frac{1+\cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} = \operatorname{cotg}\theta$
m) $\frac{\operatorname{sen} 2x}{1-\operatorname{sen} 2x\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} 2x$
n) $\operatorname{tg} 2\theta + \sec 2\theta = \frac{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}$
o) $\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$

73) Demostrar:

a) $\dfrac{\cos^3\theta-\operatorname{sen}^3\theta}{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{2+\operatorname{sen}2\theta}{2}$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}2A}{1+\cos 2A}=\operatorname{tg}A$

c) $\dfrac{\operatorname{Sen}2A}{1-\cos 2A}=\operatorname{cotg}A$

d) $\dfrac{\operatorname{sen}\theta.\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{2}=\operatorname{sen}^2\dfrac{\theta}{2}$

e) $\left(\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2=1+\operatorname{sen}\theta$

f) $\left(\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}-\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2=1-\operatorname{sen}\theta$

74) Expresar:

a) $\cos 2\theta$ en términos de $\operatorname{tg}^2\theta$

b) $\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ en términos de una función de $\dfrac{\theta}{2}$

c) $\cos 4\theta$ en términos de funciones de 2θ (3 resultados diferentes)

75) Convertir las siguientes sumas o diferencias en productos.

a) $\cos 55^\circ-\cos 18^\circ$

b) $\operatorname{sen}84^\circ-\operatorname{sen}76^\circ$

c) $\operatorname{sen}47^\circ+\cos 60^\circ$

d) $\cos 48^\circ+\cos 172^\circ$

e) $\operatorname{sen}62^\circ+\cos 149^\circ$

f) $\operatorname{sen}38^\circ-\cos 168^\circ$

g) $\cos 41^\circ-\operatorname{sen}146^\circ$

76) Demostrar:

a) $\cos 3\theta-(\operatorname{sen}4\theta-\operatorname{sen}2\theta)=\cos 3\theta\,(1-2\operatorname{sen}\theta)$

b) $\operatorname{sen}5\theta+\operatorname{sen}2\theta-\operatorname{sen}\theta=\operatorname{sen}2\theta\,(2\cos 3\theta+1)$

c) $\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 5\theta=\cos 2\theta\,(1+2\cos 3\theta)$

d) $\dfrac{\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\theta-\alpha}{2}\right)$

e) $\dfrac{\cos\theta-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\alpha}=-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\theta-\alpha}{2}\right)$

77) Verificar si es cierta o falsa las igualdades:

a) $\operatorname{sen}32^\circ+\operatorname{sen}28^\circ=\cos 2^\circ$

b) $\cos 40^\circ-\cos 80^\circ=\sqrt{3}\operatorname{sen}20^\circ$

c) $\operatorname{sen}72^\circ-\operatorname{sen}18^\circ=\sqrt{2}\cos 27^\circ$

d) $\cos(30^\circ+\theta)-\cos(30^\circ-\theta)=-\operatorname{sen}\theta$

e) $\dfrac{\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}3\theta}{\cos\theta+\cos 3\theta}=\dfrac{2\operatorname{cotg}\theta}{1-\operatorname{cotg}^2\theta}$

f) $\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cos 160^\circ=0$

g) $\cos(60^\circ-x)+\cos(60^\circ+x)=\cos x$

78) Demostrar:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=\operatorname{tg}2x$

b) $\operatorname{cotg}x-\operatorname{cotg}2x=\operatorname{cosec}2x$

79) En una cia de $5{,}1\ m$ de radio, calcular con aproximación al cm, la longitud del arco interceptado por un ángulo central de $2\frac{3}{4}$ Radianes.

80) Demostrar:

$$\operatorname{sen}A\,(1+\operatorname{tg}A)+\cos A\,(1+\operatorname{cotg}A)=\sec A+\operatorname{cosec}A$$

81) Determinar el valor máximo posible de $\operatorname{sen}(2A+20^\circ)+\operatorname{sen}40^\circ$ y el valor mínimo de A que hace que la expresión dada tome dicho valor máximo.

82) Obtener dos valores mínimos de A que satisfacen la ecuación: $\cos A=1-2\operatorname{sen}^2 A$

83) Demostrar $(1-\operatorname{tg}^2\theta)(1-\operatorname{sen}^2\theta)=\cos 2\theta$.

84) Si $\operatorname{sen} A=\frac{x-y}{x+y}$ determinar los valores de $\cos A$ y de $\operatorname{tg} A$ en términos de x e y.

85) Hallar los dos valores positivos mínimos de A que satisfacen la ecuación.

$$\operatorname{tg}^2 A+3\sec A+3=0$$

86) Demostrar:

a) $\operatorname{cotg}^2\theta-\operatorname{tg}^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta-\sec^2\theta$

b) $\frac{1+\operatorname{sen} A}{\cos A}=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}}$

87) Resolver la ecuación para $\overset{\angle}{p}<360°$

$\cos\ p=-\operatorname{sen}\ p$

88) Si $\operatorname{sen}(90°-B)=\operatorname{tg} Q\operatorname{tg}(90°-P)$, expresar $\operatorname{tg} Q$ en términos de funciones trigonométricas de B y P, evitando un resultado fraccionario.

89) Si $\operatorname{sen}(90°-C)=\cos Q\cos(90°-B)$, expresa $\operatorname{sen} B$ en términos funciones trigonométricas de C y Q, dando el resultado en forma fraccionaria.

90) En el triángulo ABC, rectángulo en C, DB es la bisectriz del ángulo $\overset{\angle}{ABC}$ y corta a $\overline{AC}$ en D. Si cada una de las mitades de $\overset{\angle}{B}$ se denota por x demostrar.

$$DB=\frac{AB(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)}{\cos x}$$

91) Dada $\operatorname{tg} 2\theta=-\frac{24}{7}$, siendo 2θ un ángulo del segundo cuadrante, determinar $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

92) Demostrar $\frac{\cos 2B}{\operatorname{tg}(45°+B)}=1-\operatorname{sen} 2B$.

93) Reducir a una sola función de x.

$$\frac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}$$

94) Si $\operatorname{tg}\theta=-1$ y θ es un ángulo del cuarto cuadrante. Calcular el valor de:

$\operatorname{sen} 120°\cos\theta-\cos 120°\operatorname{sen}\theta$

95) Si $\operatorname{tg}\theta=\frac{3}{4}$ y θ es del tercer cuadrante. Calcular:

a) $\cos(\theta-150°)$

b) $\operatorname{sen} 2\theta$

c) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$

d) $\operatorname{sen} 4\theta$

e) $\operatorname{sen}(135°-\theta)$

96) Reducir a una sola función de $2x$

$\frac{2\operatorname{tg} x}{\sec^2 x}$

97) Demostrar $\operatorname{tg}\theta(1+\cos 2\theta)=\frac{1}{\operatorname{cosec} 2\theta}$

98) Escribir las expresiones en términos de $\operatorname{sen}\theta$ y/o $\cos\theta$

a) $(\operatorname{tg}^2\theta+1)\operatorname{cotg}\theta$

b) $\operatorname{cosec}\theta\operatorname{tg}\theta\cos^2\theta$

c) $\frac{1+\operatorname{cotg}^2\theta}{\operatorname{tg}^2\theta}$

d) $\frac{2\operatorname{cosec}^2\theta-2}{\operatorname{tg}^2\theta}$

e) $\frac{\sec^2\theta}{\operatorname{cotg}^2\theta+1}$

f) $(\sec\theta+1)(1-\sec\theta)$

g) $\operatorname{cosec}\theta\,(1-\operatorname{tg}\theta)$

h) $\frac{\operatorname{tg}^3\theta+\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta}$

99) Se traza un paralelogramo sobre la misma base que la de un rectángulo. El otro lado del paralelogramo es igual a la altura del rectángulo. Si el área del paralelogramo es $\frac{9}{10}$ del rectángulo. Determinar los ángulos del paralelogramo.

100) Demostrar:

a) $\dfrac{\operatorname{cotg} A}{\sec A} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} A} - \operatorname{sen} A$

b) $\dfrac{\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \sec x - 1$

c) $\dfrac{1}{\sec^3 \theta} - \operatorname{sen}^3 \theta = (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\left(1 + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\sec\theta}\right)$

d) $\cos\theta \operatorname{sen}\theta\,(\operatorname{cotg}\theta + \operatorname{tg}\theta) = \sec^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta$

e) $1 + \dfrac{1}{\cos A} = \dfrac{\operatorname{tg}^2 A}{\sec A - 1}$

f) $\dfrac{\operatorname{cosec}\ \theta}{\cos\ \theta} = (1 + \operatorname{tg}^2\theta)\operatorname{cotg}\theta$

101) Resolver las ecuaciones para $x \leq 360°$

a) $(2\cos x + 1)(\operatorname{tg} x + 1) = 0$

b) $\operatorname{sen} x \cos x\,(1 - 2\operatorname{sen} x) = 0$

102) Determinar el valor de las expresiones:

a) $\dfrac{\operatorname{sen} 105° - \operatorname{sen} 15°}{\cos 75° + \cos 15°}$

b) $(m \operatorname{sen} 45° + b\cos 45°)(m\operatorname{sen} 135° + b \operatorname{sen} 315°)$

103) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Calcular el valor de $\operatorname{tg} 2\alpha$.

104) $\operatorname{tg} a = m$. Hallar en función de m , los valores de las demás funciones trigonométricas.

105) Sabiendo que $\operatorname{cotg} a = 1 + \sqrt{2}$, calcular el ángulo a , sin usar maquinita.

106) $\operatorname{cotg} a = m$ y $a < \frac{\pi}{4}$. Hallar $\cos 2a$ en función de m.

107) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = 0{,}1$. calcular $\operatorname{cotg} 2\alpha$, siendo $\dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$

108) Verificándose las siguientes igualdades:

$\cos 70° + \cos 36° = 1{,}51$; $\cos 53° = 0{,}6018$

Calcular $\cos 17°$

109) Expresar $\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{cotg}\alpha$ en función de $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$

110) ¿Qué ángulos comprendidos entre 0° y 435° tienen por seno 0,324?

111) Calcular el valor del seno de un ángulo para el cual se verifica que su secante es igual a la suma de su seno y coseno.

112) Hallar el verdadero valor de la expresión siguiente para $x = 90°$

$\dfrac{(1-\operatorname{sen} x)^2}{\cos x}$

113) ¿Qué ángulo comprendidos entre 0° y 652° tiene por coseno – 0,718?

114) Hallar el valor de la expresión siguiente para $b = 45°$

$\dfrac{\operatorname{tg} 2a}{1 + \sec 2a} - \dfrac{\operatorname{sen}(a-b)}{\cos a \cos b}$

115) Hallar el verdadero valor de la expresión siguiente para $\alpha = 45°$

$\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \cos 45°}$

116) Hallar el verdadero valor de la expresión para $x = 90°$

$\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$

117) Conocido $\operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, calcular el valor $\operatorname{tg} 67°30'$

118) Siendo $\sec a = \dfrac{\mathrm{m}}{\sqrt{\mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2}}$; hallar $\operatorname{sen} a$

119) Hallar el valor de la siguiente expresión.

$\log\sqrt{2} - \log \operatorname{sen} 45°$

120) Verificar las siguientes identidades:

a) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\cot\alpha = \operatorname{sen}\alpha$

b) $\frac{\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b}{\cos a+\cos b} \div \frac{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} b}{\cos b-\cos a} = -\operatorname{tg}^2\left(\frac{a+b}{2}\right)$

c) $\frac{2\operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg}^2 a} = 2\operatorname{sen} a\cos a$

121) Simplificar la expresión

$\frac{\operatorname{sen} 2a}{1+\cos 2a} \div \frac{1+\cos a}{\cos a}$

122) Si $a + b = 90$ demostrar que se verifica la igualdad

$(\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)(\cos a + \cos b) = 1 + \operatorname{sen} 2a$

123) Transformar las expresiones siguientes en otras calculables por logaritmos.

a) $\operatorname{sen} 31° - \operatorname{sen} 47°12'$

b) $\cos(-16°) - \operatorname{sen} 51°$

c) $\sqrt{3} - \operatorname{tg} 34°7'56''$

d) $\frac{\operatorname{sen} 46°-\cos 52°}{\cos 38°+\operatorname{sen} 96°}$

e) $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{sen}^2 x$

124) Simplificar la expresión siguiente:

$\frac{\operatorname{tg}(45+\alpha) - 1}{\operatorname{tg} 2\alpha}$

125) Demostrar que si se verifica $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{tg}(a-b)$, se verificara también:

$\operatorname{sen}(a-b) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2a + \operatorname{sen} 2b)$

126) Reducir la siguiente expresión a una sola línea trigonométrica.

$\frac{\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)}{\cos(a-b) - \cos(a+b)}$

127) ¿A qué línea trigonométrica equivale la expresión $\frac{1}{2}(\operatorname{cosec} 2a + \operatorname{cotg} 2a)$?

128) Demostrar la siguiente igualdad

$\operatorname{sen} a \,.\, \cos a \,.\, \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{cotg} a \,.\, \sec a \,.\, \operatorname{cosec} a = 1$

129) Transformar $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ en una expresión trigonométrica calculable por logaritmos

130) Resolver las siguientes ecuaciones para $x \leq \frac{\pi}{2}$

a) $\operatorname{tg}(45° + x) - 3\operatorname{tg} x = 2$

b) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} 2x - \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = 0$

c) $\operatorname{sen} x\operatorname{tg} x - \cos x = \frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\cos^2 x\,(9 - 2\operatorname{sen} x) = 9\operatorname{sen} x - 8\operatorname{sen}^2 x - 1$

e) $\operatorname{tg} 48°\ \operatorname{tg}(52° - x) = 1$

f) $\operatorname{sen}(x - 12°) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 12°$

g) $\cos x = \sqrt[\operatorname{sen} 27°]{\operatorname{sen} 27°}$

h) $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = 0{,}26$

i) $3\cos x = 5\operatorname{sen}(30 - x)$

j) $\operatorname{sen}(x + 10°) + \operatorname{sen}(x + 8°) = \operatorname{sen} 78°$

k) $\begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos y} = \frac{5}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1) \\ 4(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y) = 5 \ldots\ldots.(2) \end{cases}$

l) Siendo x e $y < 180°$

$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4 \ldots\ldots\ldots.(1) \\ \operatorname{tg}(x+y) = 2 \ldots\ldots\ldots.(2) \end{cases}$

m) $\begin{cases} x + y = 58°\,20' \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = 0{,}237 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2) \end{cases}$

131) Determinar el valor angular de x , un arco positivo menor que un cuadrante, cuya secante sea igual a la cotangente.

132) Dividir el ángulo de 45° en dos partes, de manera que la relación de sus senos sea igual a 0,5.

133) Hallar dos ángulos menores que 90°, que sumen 60° y que la suma de sus senos sea igual a 0,9.

134) Hallar el ángulo correspondiente a un arco cuya tangente es doble de la cuerda.

135) Resolver la ecuación:

$$\operatorname{tg}(x+45°)+\operatorname{tg}(x-45°)-2\operatorname{cotg} x=0$$

136) Hallar los valores angulares de x e y, menores que 90°, deducidos del sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y}=\sqrt{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1) \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{\operatorname{sen}(x-y)}=2+\sqrt{3} \ldots\ldots\ldots..(2) \end{cases}$$

137) Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \cos(x+y)=-1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1) \\ \operatorname{sen}(x-y)=0{,}5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2) \end{cases}$$

138) Siendo x e $y<90°$ Resolver el sistema:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos y}=\frac{\cos x}{\operatorname{tg} y}=0{,}2$$

139) Deducir los valores de $\operatorname{sen} x$ y $\cos y$ del sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x+\cos y=0{,}7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1) \\ \dfrac{\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} 2y}=\dfrac{0{,}12\cos x}{\cos^2 y} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

140) $$\begin{cases} \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=\frac{1+\sqrt{2}}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1) \\ \cos x+\cos y=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

141) Siendo x e y menores que 90°, resolver:

$$\begin{cases} x-y=45° \ldots\ldots\ldots\ldots..(1) \\ \operatorname{tg} x=\operatorname{cotg} y \ldots\ldots\ldots\ldots.(2) \end{cases}$$

142) Resolver los siguientes triángulos rectángulos. Siendo $\overset{\Delta}{ABC}$ rectángulo en $\overset{\angle}{A}$

a) $$\begin{cases} a=2+\sqrt{2}\ m \\ b=\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}\right) m \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} b=\sqrt[5]{333333}\, m \\ \overset{\angle}{C}=7°17'5" \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} c=282{,}419\ m \\ \overset{\angle}{B}=0{,}09\ Radianes \end{cases}$$

143) $c=233{,}25\ m$; $\dfrac{\overset{\angle}{B}}{\overset{\angle}{C}}=\dfrac{5}{11}$

144) $b=0{,}248\ m$; $a=\operatorname{sen}\overset{\angle}{C}$ en metros.

145) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 87,545 m y la proyección sobre ella del cateto b , 71,410 m . Resolver el triángulo.

146) Los vértices $\overset{\angle}{B}$ y $\overset{\angle}{C}$ de un triángulo rectángulo distan de A 386 m y 578 m, respectivamente.

147) Resolver un triángulo cuyo cateto b , es igual al valor del coseno B, expresado en kilogramos, y cuya hipotenusa mide 2,513 km.

148) Las proyecciones de los catetos b y c , sobre la bisectriz del ángulo que forman, miden 758 m y 62 m, respectivamente. Resolver el triángulo.

149) Resolver un triángulo rectángulo con los siguientes datos:

$\frac{b}{c} = \frac{10000}{8693}$; $a = 418\,m$

150) $b.c = 1811{,}37\,m^2$; $\overset{\angle}{C} = 74°\,52{,}6'$ con estos datos, resolver el triángulo.

151) Siendo $a - b = 32.085{,}11\,m$; $\overset{\angle}{C} = 48°\,34'23{,}8"$ resolver

152) Siendo $b + c = 4280{,}16\,m$; $\overset{\angle}{B} = 38°\,29'\,23{,}8"$. Resolver el triángulo.

153) Siendo $a = 225\,m$ y $\frac{b}{c} = \frac{4}{3}$ resolver

154) Resolver un triángulo rectángulo cuyo perímetro igual a 72 m, sabiendo que $\frac{b}{c} = \frac{2}{3}$

155) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 1915 m, y el producto de los catetos es igual a $48764\,m^2$. Determinar los ángulos agudos.

156) Resolver un triángulo rectángulo de área igual a $73926\,m^2$, conociendo además la relación de un cateto y la hipotenusa $\frac{b}{a} = \frac{3}{5}$

157) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 104 m y la altura que parte del vértice del ángulo recto $40\,m$. Hallar los valores de los ángulos agudos, siendo $\overset{\angle}{B} > \overset{\angle}{C}$.

158) Resolver un triángulo rectángulo, sabiendo que se verifica $\frac{b}{c} = \frac{3}{4}$ y que la distancia del vértice del ángulo recto a la hipotenusa es de 240 m.

159) La hipotenusa correspondiente al ángulo B de un triángulo rectángulo, mide $341\,m$, y la hipotenusa $a = 598\,m$. Resolver el triángulo.

160) Calcular los elementos de un triángulo rectángulo de $24\,m^2$ de superficie, midiendo 2 m el radio del circulo inscripto.

161) Se conoce un cateto $b = 362{,}77\,m$ y el radio del círculo circunscripto $R = 289{,}125\,m$. Resolver el triángulo rectángulo.

162) Resolver un triángulo rectángulo, conociendo los radios de los círculos inscripto y circunscripto $r = 3\,m$ y $R = 9\,m$.

163) Calcular los ángulos de un triángulo rectángulo, sabiendo que forman progresiones geométricas, los números representativos de las longitudes de sus lados.

164) Resolver los siguientes triángulos oblicuángulos:

a) $a = 30\,m$ $\quad \overset{\angle}{A} = 36°\,52'11{,}6"$ $\quad \overset{\angle}{B} = 126°\,52'\,11{,}7"$

b) $a = 1096{,}60\,m$ $\quad \overset{\angle}{B} = 47°\,54'29{,}4"$ $\quad \overset{\angle}{C} = 84°\,55'\,40{,}6"$

c) $b = 5{,}394\,m$ $\quad \overset{\angle}{A} = 25°\,17'38"$ $\quad \overset{\angle}{C} = 26°\,38'\,3{,}1"$

d) $b = 2854{,}031\,m$ $\quad \overset{\angle}{B} = 57°\,32{,}7'$ $\quad \overset{\angle}{C} = 48°\,45'$

e) $c = 625{,}9\,m$ $\quad \overset{\angle}{B} = 60°\,57'$ $\quad \overset{\angle}{C} = 66°\,18'$

f) $a = 4750{,}47\,m$ $\quad b = 7364{,}25\,m$ $\quad \overset{\angle}{A} = 17°\,42'56"$

g) $a = 96\,m$ $\quad b = 76{,}58\,m$ $\quad \overset{\angle}{C} = 10°\,4'\,51{,}6"$

h) $a = 157{,}82\,m$ $\quad c = 2204{,}56\,m$ $\quad \overset{\angle}{B} = 87°\,14'\,32{,}6"$

i) $a = 35{,}945\,m$ $\quad c = 82{,}675\,m$ $\quad \overset{\angle}{B} = 103°\,18'7{,}2"$

j) $a = 83{,}415\,m$ $\quad b = 109{,}865\,m$ $\quad c = 79{,}305\,m$

k) $a = 232{,}5\,m$ $\quad b = 184{,}6\,m$ $\quad c = 201{,}8\,m$

l) $a = 1112\,m$ $\quad b = c = 856\,m$

m) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{3}$ y $\dfrac{b}{c} = \dfrac{3}{5}$……………………………………Hallar los ángulos.

n) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{7}{3}$; $\dfrac{b}{c} = \dfrac{3}{5}$; $b = 7\,m$

o) $\dfrac{\overset{\angle}{A}}{\overset{\angle}{B}} = \dfrac{11}{27}$; $\dfrac{\overset{\angle}{B}}{\overset{\angle}{C}} = \dfrac{27}{26}$; $a = 2826{,}24\,m$

p) $a = 567{,}37\,m$ $\quad \overset{\angle}{B} = 47°\,35'25{,}8"$ $\quad b + c = 774{,}48\,m$

q) $a = 75\,m$ $\quad a + b + c = 274\,m$ $\quad \overset{\angle}{A} = 43°\,28'16"$; $c > b$

r) $a = 5467{,}48\,m$ $\quad c = 3677{,}88\,m$ $\quad \overset{\angle}{A} - \overset{\angle}{C} = 28°\,17'12"$

165) Calcular el lado c de un triángulo, sabiendo que los otros dos lados miden $a = 75\,m$ y $b = 40\,m$, y que la suma de los ángulos opuestas es 112°.

166) Resolver un triángulo, de perímetro 8740 m , y cuyos ángulos A y B valen 71° 14’ 5” y 92° 16’ 12”.

167) Calcular las longitudes de los tres lados de un triángulo, del cual se conoce su perímetro, igual a 3857 m, y dos ángulos $\overset{\angle}{A} = 35°\,12'$ y $\overset{\angle}{B} = 47°\,13'\,22"$.

168) En un triángulo, sabiendo que $a = 275\,m$ $\;b = 196\,m$ y $\overset{\angle}{A} = 2\overset{\angle}{B}$.

169) Los tres ángulos $\overset{\angle}{A}, \overset{\angle}{B}, \overset{\angle}{C}$ de un triángulo, están en la relación de los números 3, 5 y 7, respectivamente y $a = 354\,m$. Calcular los demás elementos.

170) Resolver un triángulo con los siguientes datos:

$a = 57{,}7\,m$; $\overset{\angle}{B} = 119°23'17"$; $ha = 42{,}5\,m$

171) Resolver un triángulo con los siguientes datos:

$ha = 1000\ m$; $\overset{\angle}{B} - \overset{\angle}{C} = 8°\ 8'$; $\overset{\angle}{A} = 52°\ 45'$

172) La altura que parte del vértice A de un triángulo divide a la base en dos segmentos que miden 350 m y 780 m. Calcular los ángulos $\overset{\angle}{B}$ y $\overset{\angle}{C}$, siendo $\overset{\angle}{A} = 52°\ 11'17{,}2"$ y $\overset{\angle}{B} > \overset{\angle}{C}$.

173) Resolver un triángulo isósceles, conociendo el ángulo opuesto a la base, $\overset{\angle}{B} = 32°\ 40'$ y la bisectriz respecto al lado a ; $b_a = 852\ m$.

174) El ángulo que forman las diagonales de un triángulo es de 112° 24' 8" y una de ellas mide $45{,}25\ m$. Calcular las dos dimensiones del rectángulo.

175) Hallar el ángulo que forman las diagonales de un rectángulo, siendo una de estas de 94,72 m , y la base de 92,95 m.

176) Una de las diagonales de un rombo mide 24,16 m y su perímetro 192,36 m. Calcular los ángulos.

177) Uno de los ángulos de un paralelogramo es de 67° 22' 48,5" , y las diagonales miden 465,726 m y 370 m. Calcular los lados.

178) Los dos diagonales de un paralelogramo, cuya superficie es de 3060 m^2, miden 109 m y 61 m. Calcular los lados.

179) Calcular los ángulos de un trapecio isósceles, conociendo sus bases, 38 m y 24 m, y una de sus diagonales 35,791 m.

180) Las bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de un trapecio $ABCD$ miden 40 m y 20 m, la diagonal $\overline{AC} = 30\ m$ y el ángulo que forman las diagonales es de 103° 17' . Calcular $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$

181) Calcular los ángulos de un trapecio, conociendo sus bases $\overline{AB} = 90\ m$, $\overline{CD} = 66\ m$ y los otros dos lados $\overline{AD} = 48\ m$ $\overline{BC} = 40\ m$

182) En un cuadrilátero $ABCD$ se conoce $\overline{AB} = 384\ m$; $\overline{BC} = 256\ m$; $\overline{AD} = 198\ m$; $\overset{\angle}{A} = 72°\ 36'$ y $\overset{\angle}{B} = 94°\ 17'$. Calcular la longitud del lado $\overline{CD}$.

183) Siendo la longitud del lado $\overline{ED} = 66{,}155\ m$. Calcular la longitud de los demás lados del paralelogramo.

$\overline{EO} = 46{,}855\ m$ $\overline{OD} = 39{,}435\ m$ $\overline{OB} = 49{,}145\ m$

184) Calcular el área de un triángulo semejante a otro, conociendo de este: $a = 2{,}425\ m$; $b = 3{,}512\ m$ y $\overset{\angle}{C} = 42°\ 31'25{,}4"$. La razón de semejanza es de $\frac{1}{3}$.

185) Calcular el área de un triángulo, conociendo su altura, $ha = 2354\ m$ y los ángulos que ella forma con los lados b y c, $\alpha = 23°\ 14'$ y $\beta = 8°\ 32'$

186) Calcular el área de un triángulo isósceles, conociendo el radio del circulo inscripto, $48{,}25\ m$, y uno de los ángulos adyacentes a la base 74° 8' 6,2"

187) Calcular el área de un triángulo isósceles, conociendo su base, $451{,}36\ m$ y el radio del circulo circunscripto, $290{,}72\ m$

188) Calcular el área de un rectángulo, conociendo su diagonal $352\ m$ y el ángulo que la recta determinada por uno de los extremos forma con esta base 57° 18' 33"

189) Calcular el área de un rombo, sabiendo que los extremos de la diagonal menor distan $14\ m$ de la cia que tiene por diámetro la otra diagonal, y que uno de los ángulos del rombo es de 47° 2' 1"

190) Calcular el área de la superficie del cuadrado $ABCD$ que no es común con la del círculo O.

191) Halla el área de un sector circular de $3m$ de radio, siendo la tg trigonométrica de su arco igual a 5.

192) Un triángulo isósceles, de base $40\ m$ y ángulo opuesto de 32°, está inscripto en un círculo. Calcular el área del segmento circular que tiene por cuerda la citada base.

193) Calcular el área de la figura rayada.

O…….Centro del arco ABC

O'…….Centro de la semicircunferencia DBE.

$\pi = 3{,}1416$.

194) ¿Cuántas baldosas de forma octogonal regular de 37 cm de apotema se necesitan para embaldosar un pasaje peatonal de 55,3 m de largo por 8 m de ancho?

195) Hallar el área de un rectángulo cuya base y altura son respectivamente el lado y la apotema de un pentágono regular inscripto en una circunferencia de radio R.

196) La sombra que proyecta un árbol de 3,4 m sobre el piso horizontal mide $4{,}3\ m$. Calcular la medida del ángulo formado por la línea que une los extremos del árbol y de la sombra con la horizontal.

197) La altura de un triángulo isósceles tiene una longitud de $10\ cm$ y uno de los ángulos iguales mide $30°\ 20'10''$. Calcular las medidas los tres lados del triángulo y los ángulos.

198) Una escalera de 3 $m$está recostada sobre una pared vertical y sobre el piso horizontal, forma un ángulo de 63° 18' con la horizontal. ¿Qué estatura alcanza la escalera sobre la pared?

199) Desde un punto situado a 2 m sobre el nivel del piso, un hombre de 1,7 m observa la torre de un edificio situado a 20 m sobre la horizontal. Si el que forma la visual con la horizontal es de 45° ¿Cuál es la altura del edificio?

200) La base de un triángulo isósceles mide 8 m y el ángulo opuesto a la base es de 30°. Determina las tres alturas del triángulo.

201) Un avión sale del aeropuerto El Dorado y se eleva mantenido un ángulo constante de 8° hasta que adquiere una altura de 6 km. Determina la distancia del aeropuerto en ese momento.

202) El paralelogramo $ABCD$ es tal que $\overline{AB} = 18{,}2\ m$ $\overline{AD} = 12{,}1\ m$ y ángulo $\overset{\angle}{BAD} = 30°\ 30'30''$. Calcula su área.

203) Una de las diagonales de un rombo es de 30 cm y forma con uno de los lados del mismo un ángulo de 25° 42' 11". Calcula la otra diagonal y el perímetro del rombo.

204) Calcula el volumen de un paralelepípedo de base cuadrada, sabiendo que la diagonal del paralelepípedo es de $26\ cm$ y forma con el plano de la base un ángulo de 53° 16' 20".

205) Un poste de alambrado tiene una altura de $4\ m$. Un observador está parado frente al poste a una distancia de 2 m del mismo. Si la estatura del observador es de 1,7 m ¿Cuál es la longitud de la sombra que proyecta el observador sobre el piso?

206) Desde la parte superior de un faro de 60 m de altura sobre el nivel del mar, se observa un buque con un ángulo de depresión de 28° 30' ¿Cuál es la distancia del buque al faro?

207) Un avión vuela rumbo al este con una velocidad de 300 km/h, se encuentra con un viento que viene del norte, con una velocidad de 60 km/h. Hallar la velocidad resultante y el rumbo verdadero del avión.

208) Para alcanzar la cima de un muro de 8 m de altura se utiliza una escalera de 10 m. Si la escalera se extiende 50 cm más allá del muro, determina su inclinación respecto a la horizontal.

209) Encuentra la longitud del lado de un polígono regular de nueve lados inscripto en un círculo de $4{,}06\ cm$ de radio.

210) Una nube ubicada sobre un aeropuerto representa su límite de visibilidad vertical. Para medir la altura de esta nube se dirige un reflector sobre ella para producir una mancha luminosa en la nube. A quinientos pies un observador reporto que el ángulo de la mancha respecto a la horizontal es de 32° 10' ¿A qué altura se encuentra la nube sobre el aeropuerto?

211) Si un jet sube en un ángulo de 15° con una velocidad constante de 900 millas por hora ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a una altura de 8 millas?

212) Dos puestos de observación, A y B (separados 10 millas) en la costa, vigilan barcos que entran ilegalmente en un límite de 3 millas. El puesto A reporta un barco S en un ángulo $\overset{\angle}{BAS} = 37° \, 30'$ y el puesto B reporta el mismo barco en un ángulo $ABS = 20°$ ¿A qué distancia está el barco del puesto A? ¿A qué distancia está el barco de la costa?

213) Encuentra la altura total de la torre con la información de la figura.

214) Dos lados adyacentes de un paralelogramo se cortan en un ángulo de 35° 10’ y tienen una longitud de 3 y 8 m ¿Cuál es la longitud de la diagonal más corta del paralelogramo y cuál es su área?

215) Al mediodía dos aviones parten de San Francisco a buscar un avión que cayó al océano. El avión A viaja al oeste a 400 millas por hora y el avión B al noroeste a 500 millas por hora. A las 2 P.M. el avión A observa el avión perdido y se comunica con el avión B para pedir ayuda ¿A qué distancia está el avión B del avión A en ese momento?

216) En un paralelogramo de lados $7\ cm$ y $4\ cm$, la diagonal menor mide $\sqrt{37}\ cm$. Calcula las medidas de los ángulos del paralelogramo.

217) Dos barcos tienen equipos de radio cuyo alcance es de 200 millas. Uno de los barcos se encuentra a 155 millas N 42° 40’ E de una estación costera, y el otro se encuentra a 165 millas N 45° 10’ O de la misma estación ¿pueden los dos barcos comunicarse entre sí?

218) Un faro está situado a 10 millas al noroeste de un muelle. Un barco sale del muelle a las 9 a.m. y navega hacia el oeste a razón de 12 millas por hora ¿A qué hora se encontrara a 8 millas del faro?

219) Una torre de 150 pies de altura está situada en lo alto de una colina. En un punto, en la falda de la colina, situado a 650 pies de la cima se observa que el ángulo formado por la ladera de la colina y la dirigida al extremo superior de la torre es de 12° 30’. Encontrar la inclinación de la ladera de la colina respecto a un plano horizontal.

220) Dos observadores A y B, se encuentran a una distancia de 2875 m uno del otro en un terreno plano. Ambos observadores miden el ángulo de elevación de un aeroplano que vuela sobre el espacio comprendido entre ellos. El ángulo de elevación medido por A es de 62° 45’, y el medido por B es de 50° 54’. Encontrar las distancias respectivas desde A y B hasta el aeroplano, y la distancia a que este vuela sobre la superficie de la tierra.

221) Se va a construir un túnel a través de una montaña desde A hasta B. Un punto C que es visible desde A y B se encuentra a 384,8 m de A, y 556,6 m de B. ¿Cuál es la longitud del túnel si $\overset{\angle}{ACB} = 35°$?

222) Tres cias que son tangentes exteriores dos a dos tienen por centros los puntos A, B y C. Los radios de las cias miden, respectivamente 50, 30 y 20 cm. Encontrar el área comprendida entre las tres cias(triángulo curvilíneo)

223) Verificar las siguientes identidades:

a) $\cos\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

b) $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

c) $\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5}} + \operatorname{arcsen}\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{2}$

d) $\operatorname{arcsen}\frac{3}{5} + \operatorname{arcsen}\frac{15}{17} = \operatorname{arccos} -\frac{13}{85}$

224) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\cos 2x + \cos 3x = 0$

b) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = \cos x + \cos 3x$

c) $\operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$

d) $\operatorname{arcsen} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$